УДК 517.977.14

О РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В. И. Коробов, А. В. Луценко

Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина
e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua
avluts@gmail.com

We consider the problem of robust linear stabilization of a family of nonlinear discrete control systems with uncertainties and nonlinear dependent control. We obtain sufficient conditions for robust stabilization and synthesize linear state regulators engaged in the robust stabilization. The obtained necessary conditions for robust stabilization are close to sufficient.

Розглядається задача робастної лінійної стабілізації сім'ї нелінійних дискретних керованих систем, що містить невизначеності і нелінійно залежить від керування. Отримано достатні умови робастної стабілізації та синтезовано лінійні за станом регулятори, які здійснюють робастну стабілізацію. Встановлено також необхідні умови робастної стабілізації, близькі до достатніх.

1. Введение. Стабилизация управляемых систем является одной из сложнейших проблем современной теории управления и интенсивно исследуется многими авторами [1 – 4, 13 – 22]. Значительное место в теории стабилизации занимает проблема робастной стабилизации систем [2, 4, 13, 18 – 21, 24 – 28, 31, 32], связанная с наличием неопределенностей в математическом описании систем управления. Первым результатом в этом направлении можно считать теорему А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Одним из наиболее эффективных методов исследования проблемы стабилизации нелинейных систем является метод функций Ляпунова, представляющий собой мощный инструментарий анализа и синтеза систем управления, позволивший получить большое количество важных результатов [1, 2, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 29].

В настоящей работе рассматривается одновременная стабилизация семейства нелинейных дискретных систем на базе функций Ляпунова и алгебраических уравнений Ляпунова. Применяется подход, основанный на методе квадратичной стабилизации [4], обеспечивающий существование общей функции Ляпунова для данного семейства систем.

В евклидовом пространстве рассматривается семейство нелинейных дискретных управляемых систем

$$\begin{gathered} x(k+1) = (A + A_0(k, x(k)))x(k) + (B + B_0(k, x(k)))u(k) + \varphi_0(k, x(k), u(k)), \\ (k, x(k), u(k)) \in N_0 \times R^n \times R^r, \end{gathered} \tag{1}$$

где $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $x(k) \in R^n$ — вектор состояния системы, $u(k) \in R^r$ — вектор управления. Предполагается, что A, B — заданные постоянные действительные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. Относительно действительных матриц

$A_0(k,x)$, $B_0(k,x)$ известно, что они определены в $N_0 \times R^n$ и удовлетворяют условиям

$$\|A_0(k,x)\| \le l_0\|x\|^\omega + d, \quad \|B_0(k,x)\| \le l_0\|x\|^\omega + d, \tag{2}$$

где $\omega > 0$, $l_0 \ge 0$, $0 \le d < d_0$. Относительно действительных функций $\varphi_0(k,x,u)$ известно, что в $N_0 \times R^n \times R^r$ они удовлетворяют условию

$$\|\varphi_0(k,x,u)\| \le l_1(\|x\| + \|u\|)^{1+\omega}, \quad l_1 \ge 0. \tag{3}$$

Под *робастной линейной стабилизацией* будем понимать общий для семейства (1) закон управления $u = Px$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевых решений систем (1). Другими словами, нулевые решения систем (1) должны быть устойчивы и должна существовать область притяжения начала координат, инвариантная по отношению к множеству не полностью определенных функциональных параметров $A_0(k,x)$, $B_0(k,x)$, $\varphi_0(k,x,u)$.

Будем называть *первой разностью функции $V(x)$ в силу системы*

$$x(k+1) = f(k, x(k)) \tag{4}$$

выражение $\Delta V(x) = V(f(k,x)) - V(x)$. Очевидно, что если $x(k)$ — решение системы (4), то

$$\Delta V(x(k)) = V(f(k,x(k)) - V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)).$$

Пусть:

1) $C^- = \{\lambda \in C : |\lambda| < 1\}$, $C^+ = \{\lambda \in C : |\lambda| \ge 1\}$;

2) I — единичная матрица соответствующих размерностей;

3) символ $*$ обозначает операцию транспонирования;

4) $L = \mathrm{Lin}\,(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ — линейная оболочка векторов-столбцов матриц B, $AB, \ldots, A^{n-1}B$;

5) $\sigma(\cdot)$ — спектр матрицы, стоящей в скобках;

6) e_i — вектор, совпадающий с i-м столбцом единичной матрицы соответствующих размерностей;

7) $R^{n\times m}$ — множество $(n \times m)$-матриц.

Будем называть полином *устойчивым*, если его корни принадлежат шару C^-.

2. Предварительный результат. Пусть $A_1 \in R^{m\times m}$, $B_1 \in R^{m\times r}$, $\operatorname{rank} B_1 = r$, $b_1, \ldots, b_r$ — столбцы матрицы B_1. Известно (см. [5–7]), что для того, чтобы для каждого полинома $\varphi(\lambda) = \lambda^m + \gamma_1\lambda^{\,m-1} + \ldots + \gamma_m$ с действительными коэффициентами γ_i существовала матрица $K \in R^{r\times m}$ такая, что характеристический полином $\chi_{A_1+B_1K}(\lambda)$ матрицы $A_1 + B_1K$ совпадает с полиномом $\varphi(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} Q = m$, где $Q = (B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{m-1}B_1)$.

Известны алгоритмы нахождения матрицы K (см. [5, 11, 12]). В настоящей работе используется алгоритм, предложенный в [5] и состоящий в следующем:

1. Составляем невырожденную матрицу

$$W = (b_1, A_1b_1, \ldots, A_1^{m_1-1}b_1, \ldots, b_k, A_1b_k, \ldots, A^{m_k-1}b_k) \in R^{\,m\times m}$$

из линейно независимых векторов-столбцов матрицы Q, где $m_1 + \ldots + m_k = m$, m_i — наименьшее натуральное число такое, что вектор $A_1^{m_i} b_i$ линейно зависит от предшествующих векторов матрицы W.

2. Составляем $(r \times m)$-матрицу

$$S = (0, \ldots, 0, e_2, 0, \ldots, 0, e_3, \ldots, 0, \ldots, 0, e_k, 0, \ldots, 0) \subset R^{r \times m},$$

где e_2 — m_1-й столбец, e_3 — $(m_1 + m_2)$-й столбец, ..., e_k — $(m_1 + \ldots + m_{k-1})$-й столбец матрицы S, $e_i \in R^r$.

3. Вычисляем матрицу $K_1 = SW^{-1} \in R^{r \times m}$.

4. Находим характеристический полином $\chi_{\widehat{A_1}}(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \ldots + a_m$ матрицы $\widehat{A}_1 = A_1 + B_1 K_1$.

5. Составляем матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$b_0 = (0, \ldots, 0, 1)^* \in R^{m \times 1},$$

$$T_0 = (A_0^{m-1} b_0, A_0^{m-2} b_0, \ldots, b_0) \in R^{m \times m},$$

$$T_1 = (\widehat{A}_1^{m-1} b_1, \widehat{A}_1^{m-2} b_1, \ldots, b_1) \in R^{m \times m},$$

$$T = T_0 T_1^{-1}.$$

6. Вычисляем вектор $f = (\gamma_m - a_m, \ldots, \gamma_1 - a_1)$.

7. Вычисляем матрицу

$$K = K_1 - e_1 f T. \tag{5}$$

Пусть $\dim L = m$, где $L = \operatorname{Lin}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $\operatorname{rank} B = r$, $v_1, \ldots, v_m$ — базис подпространства L и $v_{m+1}, \ldots, v_n$ — базис $L^\perp$. Образуем матрицу

$$F = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n). \tag{6}$$

Теорема 1. *Если не существует собственного вектора x_0 матрицы A^*, соответствующего собственному значению из C^+ и удовлетворяющего соотношению $x_0^* B = 0$, то включение $\sigma(A + BP) \subset C^-$ имеет место при каждой $(r \times n)$-матрице вида*

$$P = K H^* F^{-1}, \tag{7}$$

где F взято из (6), $H^* = (e_1, \ldots, e_m)^*$, e_i — i-й столбец единичной $(n \times n)$-матрицы,

$$K = SW^{-1} - e_1 f T^{-1}, \tag{8}$$

$W = (b_1, A_1b_1, \ldots, A_1^{m_1-1}b_1, \ldots, b_k, A_1b_k, \ldots, A_1^{m_k-1}b_k) \in R^{m\times m}$, $b_i \in R^m$ — столбцы матрицы $B_1 = H^*F^{-1}B \in R^{m\times r}$, $A_1 = H^*F^{-1}AFH \in R^{m\times m}$, $m_1 + \ldots + m_k = m$, m_i — наименьшее натуральное число такое, что вектор $A_1^{m_i}b_i$ линейно зависит от предшествующих векторов матрицы W; $S = (0, \ldots, 0, e_2, 0, \ldots, 0, e_3, \ldots, 0, \ldots, 0, e_k, 0, \ldots$ $\ldots, 0) \in R^{\,r\times m}$, e_2 — m_1-й столбец, e_3 — $(m_1{+}m_2)$-й столбец, $\ldots, e_k$ — $(m_1{+}\ldots{+}m_{k-1})$-й столбец матрицы S; $f = (\gamma_m - a_m, \ldots, \gamma_1 - a_1) \in R^{1\times m}$, $a_1, \ldots, a_m$ — коэффициенты характеристического полинома $\chi_{A_1+B_1SW^{-1}}(\lambda) = \lambda^m + a\lambda^{m-1} + \ldots + a_m$ матрицы $\widehat{A}_1 = A_1 + B_1SW^{-1}$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — коэффициенты произвольного устойчивого полинома $\varphi(\lambda) = \lambda^m + \gamma_1\lambda^{m-1} + \ldots + \gamma_m$ с действительными коэффициентами;

$$T = T_1T_0^{-1},$$

$$T_1 = (\widehat{A}_1^{m-1}b_1, \quad \widehat{A}_1^{m-2}b_1, \ldots, b_1),$$

$$T_0 = (A_0^{m-1}b_0, A_0^{m-2}b_0, \ldots, b_0),$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^m.$$

Доказательство. Вначале докажем, что для собственных значений λ матрицы A, удовлетворяющих условию $\lambda \in C^+$, выполняется соотношение

$$\operatorname{rank}(F^{-1}AF - \lambda I \;\; F^{-1}B) = n. \tag{9}$$

Допустим противное. Тогда $\operatorname{rank}(F^{-1}AF - \lambda I \;\; F^{-1}B) < n$ при некотором собственном значении $\lambda \in C^+$. В таком случае найдется ненулевой n-мерный вектор x_0, для которого $x_0^*(F^{-1}AF - \lambda I \;\; F^{-1}B) = 0$, или в эквивалентной форме $x_0^*(F^{-1}AF - \lambda I) = 0$, $x_0^*F^{-1}B = 0$. Последние равенства означают, что $y_0 = (F^{-1})^*x_0$ — собственный вектор матрицы A^*, соответствующий собственному значению $\overline{\lambda} \in C^+$ и удовлетворяющий соотношению $y_0^*B = 0$, что противоречит условию теоремы.

Покажем, что матрицы

$$\widehat{A} = F^{-1}AF, \quad \widehat{B} = F^{-1}B \tag{10}$$

имеют структуру

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A_1 \in R^{m\times m}$, $A_3 \in R^{(n-m)\times(n-m)}$.

Действительно, столбцы матрицы B принадлежат подпространству L. Следовательно, каждый из них представляет собой линейную комбинацию векторов $v_1, \ldots, v_m$. Поэтому в силу (10) матрица $\widehat{B}$ должна иметь вид $\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где B_1 – $(m \times r)$-матрица. Поскольку подпространство L является A-инвариантным, то $Av_i \in L$, $i = \overline{1, m}$. В таком случае из (10) получаем

$$F\widehat{A} = AF = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{1i} v_i \ldots \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m\,i} v_i \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{m+1,\,i} v_i \ldots \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n\,i}\, v_i\right),$$

а это означает, что матрица $\widehat{A}$ должна иметь вид $\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, где A_3 — квадратная матрица порядка $n-m$. Теперь равенство (9) принимает вид

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & A_2 & B_1 \\ 0 & A_3 - \lambda I & 0 \end{pmatrix} = n, \quad \lambda \in C^+. \tag{11}$$

Из (11) следует, что $\operatorname{rank}(A_3 - \lambda I) = n - m$ при каждом $\lambda \in C^+$. Последнее равенство означает, что $\sigma(A_3) \subset C^-$. Покажем теперь, что

$$\operatorname{rank}(B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{m-1} B_1) = m.$$

Действительно, учитывая, что

$$F^{-1} A^k B = F^{-1} A^k F F^{-1} B = (F^{-1} A F)^k \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^k B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

для блочных матриц получаем цепочку равенств

$$m = \operatorname{rank}(B\; AB\; \ldots\; A^{n-1}B) = \operatorname{rank}\left(F^{-1}B\; F^{-1}AB\; \ldots\; F^{-1}A^{n-1}B\right) =$$

$$= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \ldots & A_1^{n-1} B_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rank}\left(B_1\; A_1 B_1\; \ldots\; A_1^{n-1} B_1\right) = \operatorname{rank}\left(B_1\; A_1 B_1\; \ldots\; A_1^{m-1} B_1\right).$$

Применив приведенный выше алгоритм при условии, что корни полинома $\varphi(\lambda)$ принадлежат шару C^-, получаем включение $\sigma(A_1 + B_1 K) \subset C^-$, где матрица K та же, что и в (5).

Спектр матрицы $\begin{pmatrix} A_1 + B_1 K & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ принадлежит C^-, так как имеют место включения $\sigma(A_1 + B_1 K) \subset C^-$, $\sigma(A_3) \subset C^-$. Из соотношений

$$F \begin{pmatrix} A_1 + B_1 K & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} F^{-1} = A + F \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} (K\; 0) F^{-1} = A + B(K\; 0) \begin{pmatrix} H^* F^{-1} \\ * \end{pmatrix} =$$

$$= A + BKH^*F^{-1} = A + BP,$$

где $P = KH^*F^{-1}$, следует включение $\sigma(A + BP) \subset C^-$.

Теорема 1 доказана.

3. Основные результаты. Таким образом, теорема 1 позволяет заключить, что если не существует собственного вектора x_0 матрицы A^*, соответствующего собственному значению из C^+ и удовлетворяющего соотношению $x_0^* B = 0$, то найдется $(r \times n)$-матрица P такая, что

$$\sigma(A + BP) \subset C^-. \tag{12}$$

Используя эту матрицу P, получаем, что дискретное уравнение Ляпунова

$$(A + BP)^* Q(A + BP) - Q = -I \tag{13}$$

имеет (см. [4, 6, 7]) единственное положительно определенное решение $Q = Q(P)$.

В приводимой ниже теореме 2 установлены достаточные условия робастной стабилизации и указаны регуляторы, осуществляющие робастную стабилизацию.

Теорема 2. *Пусть для семейства (1) выполняются условия (2), (3) и не существует собственного вектора x_0 матрицы A^*, соответствующего собственному значению из C^+ и удовлетворяющего соотношению $x_0^* B = 0$. Тогда при*

$$d_0 = \frac{1}{1 + \|P\|} \left(\sqrt{\|A + BP\|^2 + \frac{1}{\|Q\|}} - \|A + BP\| \right)$$

семейство (1) робастно линейно стабилизируемо и в качестве стабилизирующего управления можно использовать $u = Px$, где P взято из (7), а Q — из (13).

Доказательство. Подставляя в (1) управление $u = Px$, получаем

$$x(k+1) = (A + BP)x(k) + A_0(k, x(k))x(k) + B_0(k, x(k))Px(k) + \varphi_0(k, x(k), Px(k)). \tag{14}$$

Возьмем в качестве функции Ляпунова для полученной системы квадратичную форму

$$V(x) = x^* Q x,$$

где Q взято из (13).

Вычислим первую разность функции $V(x)$ в силу этой системы:

$$\Delta V(x) = ((A + BP)x + A_0 x + B_0 Px + \varphi_0)^* \, Q \left((A + BP)x + A_0 x + B_0 Px + \varphi_0\right) - x^* Q x.$$

Поскольку в силу (13) выполняется равенство

$$x^*(A + BP)^* Q(A + BP)x - x^* Q x = -\|x\|^2,$$

то

$$\Delta V(x) = -\|x\|^2 + 2\psi^* Q(A + BP)x + \psi^* Q \psi, \tag{15}$$

где

$$\psi(k, x) = A_0(k, x)x + B_0(k, x)Px + \varphi_0(k, x, Px).$$

Из оценки

$$|2\psi^* Q(A + BP)x + \psi^* Q\psi| \le \|x\|^2 \left(c_1 \|x\|^{2\omega} + c_2 \|x\|^{\omega} + c_3\right),$$

где

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \|Q\|(1+\|P\|)^2(l_0+l_1(1+\|P\|)^{\omega})^2,\\
c_2 &= \|Q\|(l_0+l_1(1+\|P\|)^{\omega})(2a_1(1+\|P\|)+2d(1+\|P\|)^2),\\
c_3 &= \|Q\|(2a_1d(1+\|P\|)+d^2(1+\|P\|)^2),\\
a_1 &= \|A+BP\|,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

следует неравенство $2\psi^*Q(A+BP)x+\psi^*Q\psi \le \|x\|^2(c_1\|x\|^{2\omega}+c_2\|x\|^{\omega}+c_3)$. Подставляя его в (15), получаем

$$
\Delta V(x) \le \|x\|^2(-1+c_1\|x\|^{2\omega}+c_2\|x\|^{\omega}+c_3),
$$

откуда следует, что при

$$
0 \le d < \frac{1}{1+\|P\|}\left(\sqrt{\|A+BP\|^2+\frac{1}{\|Q\|}}-\|A+BP\|\right) = \frac{1}{a_2}\left(\sqrt{a_1^2+\frac{1}{\|Q\|}}-a_1\right)
$$

первая разность $\Delta V(x)$ удовлетворяет в шаре

$$
\|x\| \le \left(\frac{-c_2+\sqrt{c_2^2-4c_1(c_3-1)}}{2c_1}\right)^{1/\omega}
$$

неравенству $\Delta V(x) \le W(x)$, где $W(x) = \|x\|^2(-1+c_1\|x\|^{2\omega}+c_2\|x\|^{\omega}+c_3)$ — отрицательно определенная в этом шаре функция. Следовательно, в указанном шаре выполнены условия теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнений (14) (см. [33], предложение 2).

Теорема 2 доказана.

Пример 1. Рассмотрим семейство систем второго порядка

$$
\begin{gathered}
x_1(k+1) = 2x_1(k)+(1+(d-2x_2^2(k))\sin^2\alpha x_1(k))u(k)+(x_1^2(k)+u^2(k))\,2^{-\alpha^2k^2},\\
x_2(k+1) = \frac{1}{2}\,x_2(k)+(d+x_1^2(k))(\cos\alpha k)x_2(k)+\frac{x_1^2(k)+u^2(k)}{1+\alpha^2k^2},\\
\alpha \in R.
\end{gathered}
$$

Здесь

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (d+x_1^2)\cos k\alpha \end{pmatrix},
$$

$$
B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} (d-2x_2^2)\sin^2\alpha\, x_1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} (x_1^2+u^2)2^{-\alpha^2k^2} \\ \dfrac{x_1^2+u^2}{1+\alpha^2k^2} \end{pmatrix}, \quad \|A_0\| \le (d+x_1^2)|\cos\alpha k| \le 2\|x\|^2+d,$$

$$\|B_0\| \le (d+2x_2^2)\sin^2\alpha x_1 \le 2\|x\|^2+d, \quad \|\varphi_0\| \le (x_1^2+u^2)\sqrt{2} \le \sqrt{2}(\|x\|+|u|)^2.$$

Собственными значениями матрицы A являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Вектор $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A^*, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 2$, причем $x_0^*B = 1$. Подпространство L имеет вид $L = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, значит, $m = 1$. Очевидно, $L^\perp = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $F = F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрицу P вычисляем по формуле (7) : $P = KH^*F^{-1}$. Так как $m = 1$, то $H^* = (1\ 0)$. Матрицу K вычисляем по формуле (8): $K = SW^{-1} - e_1fT^{-1}$. Имеем $e_1 = 1$, $B_1 = b_1 = 1$, $W = 1$, $S = 0$, $A_1 = 2$, $\widehat{A}_1 = 2$, $\chi_{\widehat{A}_1} = \lambda - 2$, $a_1 = -2$.

Выберем в качестве устойчивого полинома $\varphi(\lambda) = \lambda$, тогда $\gamma_1 = 0$, $f = \gamma_1 - a_1 = 2$, $T_1 = 1$, $A_0 = 2$, $b_0 = 1$, $T_0 = 1$, $T = T_1T_0^{-1} = 1$, $K = -2$, $P = (-2\ 0)$,

$$A+BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \|Q\| = \frac{4}{3}, \quad d_0 = \frac{1}{6},$$

откуда $\sigma(A+BP) = \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$, следовательно, при $0 \le d < \dfrac{1}{6}$ данное семейство робастно линейно стабилизируемо управлением $u = -2x_1$.

В приводимой ниже теореме установлены необходимые условия робастной стабилизации уравнений (1).

Теорема 3. *Пусть для семейства (1) выполняются условия (2), (3). Для того чтобы семейство систем (1) было робастно линейно стабилизируемым, необходимо, чтобы не существовало собственного вектора x_0 матрицы A^*, соответствующего собственному значению λ_j с $|\lambda_j| > 1$ и удовлетворяющего соотношению $x_0^*B = 0$.*

Доказательство. Пусть семейство (1) робастно линейно стабилизируемо управлением $u = Px$. Подставляя в (1) управление $u = Px$, получаем (14).

Действуя от противного, предположим, что существует собственный вектор x_0 матрицы A^*, соответствующий собственному значению λ_j с $|\lambda_j| > 1$ и удовлетворяющий соотношению $x_0^*B = 0$.

Из равенств $A^*x_0 - \lambda_jx_0 = 0$, $x_0^*B = 0$ следует равенство

$$x_0^*(A+BP-\lambda_jI) = 0.$$

Следовательно, λ_j — собственное значение матрицы $A+BP$.

Таким образом, матрица $A+BP$ имеет, по крайней мере, одно собственное значение λ, удовлетворяющее условию $|\lambda| > 1$. Возможны два случая: или матрица $A+BP$ имеет собственные значения λ, удовлетворяющие условию $|\lambda| \le 1$, или все собственные значения матрицы $A+BP$ удовлетворяют условию $|\lambda| > 1$.

Рассмотрим вначале первый случай. Пусть T — невырожденная действительная $(n \times \times n)$-матрица, приводящая матрицу $A + BP$ к блочно-диагональной форме

$$T^{-1}(A + BP)T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma(A_1) = \{\lambda \in \sigma(A+BP) : |\lambda| > 1\}$, $\sigma(A_2) = \{\lambda \in \sigma(A+BP) : |\lambda| \leq 1\}$, A_1 — матрица размерностей $m \times m$, A_2 — матрица размерностей $(n - m) \times (n - m)$.

Подставляя в (14) $x = Ty$, получаем

$$y(k+1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} y(k) + \psi(k, y(k)), \tag{17}$$

где

$$\psi(k, y) = T^{-1}(A_0(k, Ty)Ty + B_0(k, Ty)PTy + \varphi_0(k, Ty, PTy)) \tag{18}$$

и удовлетворяются оценки

$$\|A_0(k, Ty)\| \leq l_0\|T\|^\omega\|y\|^\omega + d, \quad \|B_0(k, Ty)\| \leq l_0\|T\|^\omega\|y\|^\omega + d,$$

$$\|\varphi_0(k, Ty, PTy)\| \leq l_1(\|T\| + \|P\|\|T\|)^{1+\omega}\|y\|^{1+\omega}.$$

В силу линейности подстановки $x = Ty$ нулевые решения системы (17) асимптотически устойчивы.

Систему (17) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= A_1 y_1(k) + \psi_1(k, y(k)), \quad y_1 \in R^m, \\ y_2(k+1) &= A_2 y_2(k) + \psi_2(k, y(k)), \quad y_2 \in R^{n-m}. \end{aligned} \tag{19}$$

Поскольку $\|\psi_i(k, y)\| \leq \|\psi(k, y)\|$, $i = 1, 2$, то для функций $\psi_i(k, y)$ получаем в силу (18) оценку

$$\|\psi_i(k, y)\| \leq \|\psi(k, y)\| \leq \|T^{-1}(A(k, Ty)Ty + B(k, Ty)PTy + \varphi(k, Ty, PTy))\| \leq$$

$$\leq M_1\|y\|^{1+\omega} + dM_2\|y\|,$$

где $M_1 = \|T^{-1}\|(l_0\|T\|^{1+\omega}(1 + \|P\|) + l_1\|T\|^{1+\omega}(1 + \|P\|)^{1+\omega})$, $M_2 = \|T^{-1}\|\,\|T\|(1 + \|P\|)$.

Обозначим $\min_{\lambda_j \in \sigma(A_1)} |\lambda_j| = 1 + \gamma, \gamma > 0$ и возьмем число $q > 0$ такое, что $1 < q < < 1 + \gamma$. Тогда справедливы включения $\sigma\left(\dfrac{1}{q} A_1\right) \subset C^+$, $\sigma\left(\dfrac{1}{q} A_2\right) \subset C^-$.

В таком случае алгебраические матричные уравнения Ляпунова

$$\left(\frac{1}{q} A_1\right)^* Q_1 \left(\frac{1}{q} A_1\right) - Q_1 = I, \tag{20}$$

$$\left(\frac{1}{q} A_2\right)^* Q_1 \left(\frac{1}{q} A_2\right) - Q_2 = -I \tag{21}$$

имеют решения Q_1, Q_2, являющиеся положительно определенными матрицами соответствующих размерностей.

Возьмем в качестве функции Ляпунова для системы (19) квадратичную форму

$$V(y) = y_1^* Q_1 y_1 - y_2^* Q_2 y_2.$$

Очевидно, в точках $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_1 \neq 0$, будет $V(y) > 0$. Вычислим первую разность функции $V(y)$ в силу системы (19):

$$\Delta V(y) = (A_1 y_1 + \psi_1)^* Q_1 (A_1 y_1 + \psi_1) - (A_2 y_2 + \psi_2)^* Q_2 (A_2 y_2 + \psi_2) - y_1^* Q_1 y_1 + y_2^* Q_2 y_2.$$

Поскольку в силу (20), (21) выполняются равенства

$$y_1^* A_1^* Q_1 A_1\, y_1 = q^2(\|y_1\|^2 + y_1^* Q_1\, y_1),$$

$$y_2^* A_2^* Q_2 A_2\, y_2 = q^2(-\|y_2\|^2 + y_2^* Q_2\, y_2),$$

то

$$\Delta V(y) = q^2\|y\|^2 + (q^2-1)V(y) + 2\psi_1^* Q_1 A_1\, y_1 - 2\psi_2^* Q_2 A_2\, y_2 + \psi_1^* Q_1 \psi_1 - \psi_2^* Q_2 \psi_2\,. \tag{22}$$

Из оценки

$$|2\psi_1^* Q_1 A_1\, y_1 - 2\psi_2^* Q_2 A_2\, y_2 + \psi_1^* Q_1 \psi_1 - \psi_2^* Q_2 \psi_2| \le \|y\|^2 \left(c_1\|y\|^{2\omega} + c_2\|y\|^{\omega} + c_3\right),$$

где

$$c_1 = (\|Q_1\| + \|Q_2\|)M_1^2,$$

$$c_2 = 2(\|Q_1 A_1\| + \|Q_2 A_2\|)M_1 + 2(\|Q_1\| + \|Q_2\|)dM_1M_2,$$

$$c_3 = 2(\|Q_1 A_1\| + \|Q_2 A_2\|)dM_2 + (\|Q_1\| + \|Q_2\|)d^2M_2^2,$$

следует неравенство

$$2\psi_1^* Q_1 A_1\, y_1 - 2\psi_2^* Q_2 A_2\, y_2 + \psi_1^* Q_1 \psi_1 - \psi_2^* Q_2 \psi_2 \ge -\|y\|^2 \left(c_1\|y\|^{2\omega} + c_2\|y\|^{\omega} + c_3\right).$$

Подставляя это неравенство в (22), получаем

$$\Delta V(y) \ge (q^2-1)V(y) + \left(q^2 - \left(c_1\|y\|^{2\omega} + c_2\|y\|^{\omega} + c_3\right)\right)\|y\|^2,$$

откуда следует, что при

$$d < \frac{-(\|Q_1A_1\| + \|Q_2A_2\|) + \sqrt{(\|Q_1A_1\| + \|Q_2A_2\|)^2 + (\|Q_1\| + \|Q_2\|)q^2}}{(\|Q_1\| + \|Q_2\|)\|T^{-1}\|\,\|T\|(1+\|P\|)}$$

в шаре
$$\|y\| \le \left(\frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1(c_3 - q^2)}}{2c_1}\right)^{1/\omega}$$
выполняется неравенство
$$\Delta V(y) \ge (q^2 - 1)V(y). \tag{23}$$

Если через $y(k, k_0, y_0)$ обозначить решение уравнения (17), удовлетворяющее начальному условию $y(k_0, k_0, y_0) = y_0$, то из (23) вытекает, что
$$V(y(k+1, k_0, y_0)) \ge (q^2)^{k-k_0+1}V(y_0),$$
откуда следует, что нулевое решение уравнения (17) неустойчиво. Противоречие.

Теперь рассмотрим второй случай. Поскольку все собственные значения матрицы $A+$ $+BP$ принадлежат множеству $\{\lambda : |\lambda| > 1\}$, то матричное уравнение Ляпунова
$$(A + BP)^*Q(A + BP) - Q = I \tag{24}$$
имеет единственное положительно определенное решение Q. В качестве функции Ляпунова для системы (14) возьмем квадратичную форму $V(x) = x^*Qx$.

Вычислим первую разность функции $V(x)$ в силу этой системы:
$$\Delta V(x) = ((A+BP)x + A_0x + B_0Px + \varphi_0)^*Q((A+BP)x + A_0x + B_0Px + \varphi_0) - x^*Qx.$$
Поскольку из (24) следует равенство
$$x^*(A+BP)^*Q(A+BP)x - x^*Qx = \|x\|^2,$$
то
$$\Delta V(x) = \|x\|^2 + 2\psi^*Q(A+BP)x + \psi^*Q\psi, \tag{25}$$
где
$$\psi(k, x) = A_0(k, x)x + B_0(k, x)Px + \varphi_0(k, x, Px).$$
Из оценки
$$|2\psi^*Q(A+BP)x + \psi^*Q\psi| \le \|x\|^2(c_1\|x\|^{2\omega} + c_2\|x\|^\omega + c_3),$$
где c_i взято из (16), следует неравенство $2\psi^*Q(A + BP)x + \psi^*Q\psi \ge -\|x\|^2(c_1\|x\|^{2\omega} +$ $+c_2\|x\|^\omega + c_3)$. Подставляя это неравенство в (25), получаем
$$\Delta V(x) \ge \|x\|^2(1 - c_1\|x\|^{2\omega} - c_2\|x\|^\omega - c_3),$$
откуда следует, что при
$$0 \le d < \frac{1}{1+\|P\|}\left(\sqrt{\|A+BP\|^2 + \frac{1}{\|Q\|}} - \|A+BP\|\right) = \frac{1}{a_2}\left(\sqrt{a_1^2 + \frac{1}{\|Q\|}} - a_1\right)$$

первая разность $\Delta V(x)$ удовлетворяет в шаре

$$\|x\| \leq \left(\frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1(c_3 - 1)}}{2c_1} \right)^{1/\omega}$$

неравенству $\Delta V(x) \geq W(x)$, где $W(x) = \|x\|^2(1 - c_1\|x\|^{2\omega} - c_2\|x\|^{\omega} - c_3)$ — положительно определенная в этом шаре функция. Следовательно, в этом шаре выполнены условия теоремы о неустойчивости нулевого решения уравнений (14) (см. [33], предложение 4).

Таким образом, управление $u = Px$ не стабилизирует семейство (1). Противоречие.

Теорема 3 доказана.

Пример 2. Заменив в семействе систем примера 1 матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, вектор $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ вектором $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, убедимся, что полученное новое семейство систем удовлетворяет условиям теоремы 3 и, следовательно, не является робастно линейно стабилизируемым.

4. Выводы. В настоящей работе для семейства объектов

$$x(k+1) = (A + A_0(k, x(k)))x(k) + (B + B_0(k, x(k)))u(k) + \varphi_0(k, x(k), u(k)),$$

нелинейных по управлению и с функциональными неопределенностями, синтезируется множество общих линейных по состоянию регуляторов $u = Px$, обеспечивающих робастную линейную стабилизацию данного семейства. Проводится оценка допустимого значения параметра d для каждого стабилизирующего регулятора. В основу синтеза положен метод квадратичной стабилизации.

1. *Коробов В. И.* Метод функции управляемости. — М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2007. — 576 с.
2. *Коробов В. И., Луценко А. В.* Робастная стабилизация одного класса нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 2014. — Вып. 8. — С. 99 – 112.
3. *Коробов В. И., Луценко А. В.* Стабилизация линейных автономных дискретных систем // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. — 2005. — № 711. — С. 28 – 36.
4. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
5. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
6. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 312 с.
7. *Зубов В. И.* Теория уравнений управляемого движения. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 288 с.
8. *Langenhop C. E.* On the stabilization of linear systems // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — **15**, № 5. — P. 735 – 742.
9. *Popov V. M.* Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Rev. roum. sci. techn. Sér. élecfrotechn. et énerg. — 1964. — **9**. — P. 629 – 690.
10. *Wonham W. M.* On pole assignment in multi-input controllable linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1967. — **12**, № 6. — P. 660 – 665.
11. *Wonham W. M.* Linear multivariable control: a geometric approach. — Springer-Verlag, 1979.

12. *Polderman J. W., Willems J. C.* Introduction to mathematical systems theory: a behavioral approach. — Springer-Verlag, 1998. — 424 p.
13. *Qu Z.* Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties // Syst. and Contr. Lett. — 1992. — **18**. — P. 301 – 307.
14. *Boyd S. L., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
15. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M.* LMI control toolbox. — Natick, MA: Math. Works, 1995.
16. *Cao Y., Sun Y., Mao W.* Output feedback decentralized stabilization: ILMI approach // Syst. and Contr. Lett. — 1998. — **35**. — P. 183 – 194.
17. *Nguang S., Fu M.* Global quadratic stabilization of a class of nonlinear systems // Int. J. Robust Nonlinear Contr. — 1998. — **8**. — P. 483 – 497.
18. *Battilotti S.* Robust stabilization of nonlinear systems with pointwise norm-bounded uncertainties: a control Lyapunov function approach // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1999. — **44**, № 1. — P. 3 – 17.
19. *Dullerud G., Paganini F.* A course in robust control theory — a convex approach. — New York: Springer, 2000.
20. *Siljak D., Stipanovic D.* Robust stabilization of nonlinear systems // Math. Probl. Eng. — 2000. — **6**. — P. 461 – 493.
21. *Stipanovic D., Siljak D.* Robust stability and stabilization of discretetime non-linear systems: The LMI approach // Int. J. Contr. — 2001. — **74**. — P. 873 – 879.
22. *Khalil N. K.* Nonlinear systems. — New York: Prentice Hall, 2002.
23. *Zak S. H.* Systems and control. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
24. *Ho D., Lu G.* Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach // Int. J. Contr. — 2003. — **76**. — P. 105 – 115.
25. *Zuo Z., Wang J., Huang L.* Robust stabilization for non-linear discrete-time systems // Int. J. Contr. — 2004. — **77**. — P. 384 – 388.
26. *Yu M., Wang L., Chu T.* Robust stabilization of nonlinear sampled-data systems // Amer. Contr. Conf. — 2005. — P. 3421 – 3426.
27. *Amato F.* Robust control of linear systems subject to uncertain time-varying parameters. — Berlin: Springer-Verlag. 2006.
28. *Zuber I. E., Gelig A. Kh.* Synthesis of robust stabilizing control for nonlinear systems // ENOC-2008. — St. Peterburgs, 2008. — **4**.
29. *Sun Y. G, Wang L.* Stabilization of planar discrete-time switched systems: switched Lyapunov functional approach // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. — 2008. — **2**. — P. 1062 – 1068.
30. *Zhang W., Abate A., Hu J., Vitus M. P.* Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems // Automatica. — 2009. — **45**. — P. 2526 – 2536.
31. *Jabri D., Guelton K., Manamanni N., Jaadari A., Chinh C.* Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law // CEAI. — 2012. — **14**, № 2. — P. 40 – 49.
32. *Rajchakit G., Rojsiraphisal T., Rajchakit M.* Robust stability and stabilization of uncertain switched discrete-time systems // Adv. Difference Equat. — 2012. — **134**. — P. 1 – 15.
33. *Hahn W.* Uber die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen // Math. Ann. — 1958. — **136**. — S. 430 – 441.

Получено 31.03.15,
после доработки — 29.07.15