УДК 517.93

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ ЗАДАЧЕ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

И. А. Бойцова

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: boitsova.irina@mail.ru

The optimal control problem is described by adifferential system with fast and slow variables, and a terminal quality criterion. The control in the problem is linear. We prove that an optimal control of the averaged problem is asymptotically optimal for the initial problem.

Задача оптимального керування описується системою диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними і термінальним критерієм якості. Керування у задачі є лінійним. Доведено, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням заданої задачі.

1. Введение. Поведение динамических систем с разными скоростями изменения составляющих движения обычно описывается дифференциальными уравнениями, содержащими быстрые и медленные переменные. Особый интерес представляют задачи оптимального управления. Применяя метод усреднения, получают соответствующие усредненные задачи, решение которых оказывается проще первоначально заданных.

В работах [1, 2] обосновано применение различных алгоритмов построения асимптотически оптимальных управлений задачи, если найдено оптимальное управление соответствующей усредненной задачи.

В работах [3, 4] рассмотрены нелинейные и линейные по управлению задачи оптимального управления, которые описываются дифференциальными уравнениями в стандартном виде. Доказано, что оптимальное управление усредненной задачи при определенных условиях является асимптотически оптимальным управлением данной задачи.

В предлагаемой работе получены аналогичные результаты для задачи оптимального управления, в которой дифференциальные уравнения содержат быстрые и медленные переменные, и в которую управление входит линейно.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления, которая описывается системой дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными

$$\begin{gathered} \dot{x} = \varepsilon[f(t,x,y) + A(x)u], \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} = g(t,x,y), \quad y(0) = y_0, \end{gathered} \tag{1}$$

и терминальным критерием качества

$$J[u] = \varphi(x(T)) \to \min_{u \in U}, \tag{2}$$

где время $t \in [0, T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$ — заданная постоянная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x(t) \in D_x \subset R^n$ — медленные переменные, $y(t) \in D_y \subset R^m$ — быстрые переменные, $f(t, x, y)$ — заданная вектор-функция размерности n, $g(t, x, y)$ — заданная вектор-функция размерности m, $A(x)$ — заданная матрица размерности $n \times r$, $\varphi(x)$ — заданная скалярная функция, $u(t) \in U \subset \operatorname{conv}(R^r)$ — управление, принадлежащее выпуклому компактному множеству U в пространстве R^r, значения x_0, y_0 — заданные начальные условия задачи.

Условие 1. Пусть функции $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ измеримы по переменной t, функции $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$, $A(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют условию Липшица по фазовым переменным с постоянной λ для всех t, функции $f(t, x, y)$ и $A(x)$ равномерно ограничены постоянной M.

Определение 1. *Допустимыми управлениями задачи (1) назовем измеримые функции $u = u(t)$ из выпуклого и компактного множества U, для которых найдется $\varepsilon_0 > 0$, не зависящее от $u(t)$ и такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ соответствующие этим управлениям решения $x(t) \in D_x$, $y(t) \in D_y$ системы дифференциальных уравнений (1) определены при всех $t \in [0, T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$.*

Определение 2. *Оптимальным управлением задачи (1), (2) назовем такое допустимое управление $u^*(t)$, на котором критерий качества (2) принимает минимальное значение $J^* = J[u^*]$.*

Особенностью задачи оптимального управления (1), (2) является то, что допустимые управления $u(t)$ входят в нее линейно и выбираются из выпуклого и компактного множества U. Это означает [5] (п. 4.3), что для задачи (1), (2) существуют оптимальное управление $u^*(t)$, соответствующая оптимальная траектория $x^*(t)$ и оптимальное значение критерия качества $J^* = J[u^*]$.

Для системы дифференциальных уравнений (1) рассмотрим соответствующую вырожденную задачу при $\varepsilon = 0$, считая x параметром:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= g(t, x, y), \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Условие 2. Пусть решение $y = h(t, x, y_0)$ вырожденной задачи (3) существует для любого y_0, определено при $t \geq 0$ и удовлетворяет условию Липшица по переменной x.

Условие 3. Пусть равномерно относительно x, y_0, t_0 существует предел

$$f_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(s, x, h(s, x, y_0))ds. \tag{4}$$

Заметим, что при выполнении условия 1 полученная предельная функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x.

Задаче оптимального управления (1), (2) поставим в соответствие усредненную задачу оптимального управления, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = \varepsilon[f_0(z) + A(z)v], \quad z(0) = x_0, \tag{5}$$

и терминальным критерием качества

$$J_0[v] = \varphi(z(T)) \to \min_{v \in U}, \tag{6}$$

где функция $v = v(t)$ является допустимым управлением для задачи (5) и также выбирается из выпуклого и компактного множества U. Следовательно [5] (п. 4.3), для усредненной задачи (5), (6) существуют оптимальное управление $v^*(t)$, соответствующая оптимальная траектория $z^*(t)$ и оптимальное значение критерия качества $J_0^* = J_0[v^*]$.

3. Нахождение асимптотического решения задачи. Покажем, что любое допустимое управление системы (1) будет допустимым и для системы (5), при этом соответствующие этому управлению траектории систем (1) и (5) будут близки на конечном асимптотически большом промежутке времени. Кроме того, любое допустимое управление системы (5) будет допустимым и для системы (1), а соответствующие ему траектории близки на том же промежутке времени.

Теорема 1. *Пусть для систем дифференциальных уравнений (1) и (5) в области* $D = \{t \geq 0, x \in D_x \subset R^n, y \in D_y \subset R^m, u \in U \subset \operatorname{comp}(R^r)\}$ *выполнены условия 1–3. Кроме того,*

4) для любого управления $v(t) \in U$ *соответствующее решение* $z(t)$, $z(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$, *усредненной системы (5) определено при* $t \geq 0$ *и лежит вместе со своей* ρ*-окрестностью в области* D_x.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, T]$ *выполняется следующее:*

а) любое допустимое управление $u(t) \in U$ *системы (1) является допустимым управлением усредненной системы (5) и соответствующие траектории* $x(t) \in D_x$ *системы (1) и* $z(t) \in D_x$ *системы (5) при условии* $x(0) = z(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ *удовлетворяют неравенству*

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \eta; \tag{7}$$

б) любое допустимое управление $v(t) \in U$ *усредненной системы (5) является допустимым управлением системы (1) и соответствующие траектории* $z(t) \in D_x$ *системы (5) и* $x(t) \in D_x$ *системы (1) при условии* $z(0) = x(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ *удовлетворяют неравенству (7).*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы выберем произвольное допустимое управление $u(t) \in U$ системы (1), тогда $x(t)$, $y(t, x_0, y_0)$ — соответствующее решение этой системы, которое определено для всех $t \geq 0$ до выхода решения на границу области, $h(t, x, y_0)$ — решение вырожденной задачи (3) для быстрых переменных, которое существует и определено для всех $t \geq 0$. Из выполнения условия 4 теоремы следует, что для произвольно выбранного управления $u(t) \in U$ соответствующее решение $z(t)$, $z(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$, усредненной системы (5) определено при $t \geq 0$ и лежит вместе со своей ρ-окрестностью в области D_x, не выходя на ее границу. А это означает, что управление $u(t) \in U$ является допустимым и для усредненной системы (5).

Выберем произвольное $\eta > 0$ такое, что $\eta < \rho$, и зафиксируем его. Оценим разность между соответствующими решениями систем (1) и (5):

$$\begin{aligned}\|x(t)-z(t)\| \le \varepsilon &\left\| \int_0^t [f(s,x(s),y(s,x_0,y_0)) - f_0(z(s))]ds \right\| + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t [A(x(s))u(s) - A(z(s))u(s)]ds \right\| \le \\ &\le \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s,x(s),y(s,x_0,y_0)) - f_0(x(s))]ds \right\| + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t [f_0(x(s)) - f_0(z(s))]ds \right\| + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t [A(x(s))u(s) - A(z(s))u(s)]ds \right\| \le \\ &\le \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s,x(s),y(s,x_0,y_0)) - f_0(x(s))]ds \right\| + \\ &+ \varepsilon\lambda \int_0^t \|x(s)-z(s)\| ds + \varepsilon\lambda \int_0^t \|u(s)\|\, \|x(s)-z(s)\| ds \le \\ &\le \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s,x(s),y(s,x_0,y_0)) - f_0(x(s))]ds \right\| + \\ &+ \varepsilon\lambda \int_0^t (1+\|u(s)\|)\, \|x(s)-z(s)\| ds.\end{aligned}$$

Управление $u(t)$ выбирается из компактного множества U, значит, найдется такая постоянная величина $K > 0$, что для любого $t \ge 0$

$$\|u(t)\| \le K. \tag{8}$$

Тогда неравенство примет вид

$$\|x(t)-z(t)\| \le I + \varepsilon\lambda(1+K) \int_0^t \|x(s)-z(s)\| ds, \tag{9}$$

где

$$I = \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))] ds \right\|. \tag{10}$$

Для проведения дальнейшего доказательства теоремы необходимо оценить разность быстрых решений системы (1) и вырожденной системы (3). При выполнении условия 1 и соотношения (8) получим

$$\begin{aligned} \|y(t, x_0, y_0) - h(t, x_0, y_0)\| &\leq \int_0^t \|g(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - g(s, x_0, h(s, x_0, y_0))\| ds \leq \\ &\leq \lambda \int_0^t \|x(s) - x_0\| ds + \lambda \int_0^t \|y(s, x_0, y_0) - h(s, x_0, y_0)\| ds \leq \\ &\leq \lambda \int_0^t \left\| \varepsilon \int_0^s [f(\tau, x(\tau), y(\tau, x_0, y_0)) + A(x(\tau))u(\tau)] d\tau \right\| ds + \\ &+ \lambda \int_0^t \|y(s, x_0, y_0) - h(s, x_0, y_0)\| ds \leq \\ &\leq \varepsilon\lambda M(1 + K) \int_0^t s ds + \lambda \int_0^t \|y(s, x_0, y_0) - h(s, x_0, y_0)\| ds, \end{aligned}$$

откуда по лемме Гронуолла – Беллмана следует, что

$$\|y(t, x_0, y_0) - h(t, x_0, y_0)\| \leq \varepsilon\lambda M(1 + K) \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} = \varepsilon\beta(t). \tag{11}$$

Очевидно, что $\beta = \beta(t)$ — неубывающая по t функция. Обозначим через $t^*(\varepsilon)$ корень уравнения

$$\beta(t) = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}},$$

где C — некоторая постоянная. Тогда $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\beta(t^*) = \lim_{\varepsilon \to 0} C\sqrt{\varepsilon} = 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};\, t^*(\varepsilon) \right\}, \tag{12}$$

которая имеет свойства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta(\varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\Delta(\varepsilon) = 0. \tag{13}$$

Разобьем промежуток времени $[0, T]$ на отрезки длины Δ точками деления $t_i = i\Delta$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $N = E\left(\dfrac{T}{\Delta}\right)$, $E(a)$ — целая часть числа a.

Из (11) следует, что на каждом частичном промежутке $t \in [t_i, t_{i+1}]$ разность быстрых решений оценивается величиной

$$\|y(t, x_i, y_i) - h(t, x_i, y_i)\| \le \varepsilon\beta(\Delta) = C\sqrt{\varepsilon}. \tag{14}$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t \in [0, T]$, для которого найдется частичный промежуток $[t_k, t_{k+1})$ такой, что $t \in [t_k, t_{k+1})$. При этом k будет наибольшим значением индекса, при котором $t_k \le t$. Тогда будут выполняться соотношения

$$k\Delta \le T = \frac{L}{\varepsilon}, \quad \varepsilon k\Delta \le L. \tag{15}$$

Вернемся к выражению (10) и оценим его с учетом того, что $t \in [t_k, t_{k+1})$:

$$\varepsilon\left\|\int\limits_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| =$$

$$= \varepsilon\left\|\int\limits_0^{t_k} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| +$$

$$+ \varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\|. \tag{16}$$

В (16) оценим второе слагаемое. При выполнении условия 1 получим

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^t f(s, x(s), y(s, x_0, y_0))ds\right\| + \varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^t f_0(x(s))ds\right\| \le$$

$$\le \varepsilon M\Delta + \varepsilon M\Delta = 2\varepsilon\Delta M. \tag{17}$$

Первое слагаемое в (16) преобразуем к виду

$$\varepsilon\left\|\int\limits_0^{t_k} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| \le$$

$$\le \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i)))] ds \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i))) - f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i)))] ds \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i))) - f_0(x(t_i))] ds \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f_0(x(t_i)) - f_0(x(s))] ds \right\| \tag{18}$$

и оценим последовательно каждое слагаемое в (18). Для первого слагаемого при выполнении условия 1 и соотношений (15) получаем

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i)))] ds \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(\|x(s) - x(t_i\| + \|y(s, x_0, y_0) - y(s, x(t_i), y(t_i))\|) ds \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon M(1+K)\Delta ds + \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|y(s, x_0, y_0) - y(s, x(t_i), y(t_i))\| ds \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \cdot k\Delta\varepsilon \cdot M(1+K)\Delta + 0 \le \varepsilon\Delta\lambda L M(1+K). \tag{19}$$

Для второго слагаемого в (18) из условия 1 и соотношений (14), (15) имеем

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i))) - f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i)))] ds \right\| \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|y(s, x(t_i), y(t_i)) - h(s, x(t_i), y(t_i))\| ds \le$$

$$\le \varepsilon\lambda k\Delta\varepsilon\beta(\Delta) \le \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L. \tag{20}$$

Из условия 3 следует, что существует монотонно убывающая функция $\psi = \psi(\Delta)$ такая, что $\lim_{\Delta\to\infty}\psi(\Delta) = 0$, и для третьего слагаемого в (18) справедлива оценка

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[f(s,x(t_i),h(s,x(t_i),y(t_i))) - f_0(x(t_i))]ds\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x(t_i),h(s,x(t_i),y(t_i)))ds - \Delta f_0(x(t_i))\right)\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\Delta\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x(t_i),h(s,x(t_i),y(t_i)))ds - f_0(x(t_i))\right)\right\| \le$$

$$\le \varepsilon k\Delta\psi(\Delta) \le L\psi(\Delta). \tag{21}$$

Оценка последнего слагаемого в (18) получается при выполнении условия 1 и соотношений (15):

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[f_0(x(t_i)) - f_0(x(s))]ds\right\| \le \varepsilon\lambda\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|x(t_i) - x(s)\|ds \le$$

$$\le \varepsilon\lambda k\Delta\cdot\varepsilon M(1+K)\Delta \le \varepsilon\Delta\lambda LM(1+K). \tag{22}$$

Принимая во внимание оценки (19) – (22) для слагаемых, входящих в представление (18), получаем

$$\varepsilon\left\|\int\limits_0^{t_k}[f(s,x(s),y(s,x_0,y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\Delta\lambda LM(1+K) + \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L + L\psi(\Delta) + \varepsilon\Delta\lambda LM(1+K), \tag{23}$$

откуда с учетом соотношения (16) и оценки (17) следует оценка для интеграла (10) в виде

$$I = \varepsilon\left\|\int\limits_0^{t}[f(s,x(s),y(s,x_0,y_0)) - f_0(x(s))]ds\right\| \le$$

$$\le 2\varepsilon\Delta\lambda LM(1+K) + \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L + L\psi(\Delta) + 2\varepsilon\Delta M =$$

$$= 2\varepsilon\Delta M(1+\lambda L(1+K)) + \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L + L\psi(\Delta). \tag{24}$$

Оценку разности решений системы (1) и соответствующей усредненной системы (5) по медленным переменным, исходя из неравенства (9) и полученной оценки (24), можно записать в виде

$$\|x(t)-z(t)\| \le 2\varepsilon\Delta M(1+\lambda L(1+K))+\varepsilon\beta(\Delta)\lambda L+L\psi(\Delta)+$$

$$+\varepsilon\lambda(1+K)\int\limits_0^t \|x(s)-z(s)\|ds,$$

откуда по лемме Гронуолла – Беллмана получаем

$$\|x(t)-z(t)\| \le (2\varepsilon\Delta M(1+\lambda L(1+K))+\varepsilon\beta(\Delta)\lambda L+L\psi(\Delta))e^{\lambda L(1+K)}. \tag{25}$$

Из обозначения (12) следует, что $\Delta \le \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, откуда $\varepsilon\Delta \le \sqrt{\varepsilon}$. Из определения функции $\beta = \beta(t)$ в (11) и ее свойств следует, что $\varepsilon\beta(\Delta) = C\sqrt{\varepsilon}$, где C — некоторая постоянная. Тогда часть выражения в правой части неравенства (25) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}(2M(1+\lambda L(1+K))+C\lambda L)e^{\lambda L(1+K)} = 0,$$

откуда следует, что для любого $\eta_1 > 0$ найдется $\varepsilon_1(\eta_1) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\varepsilon}(2M(1+\lambda L(1+K))+C\lambda L)e^{\lambda L(1+K)} \le \eta_1. \tag{26}$$

Это означает, что ε_1 можно взять равным

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\eta_1}{(2M(1+\lambda L(1+K))+C\lambda L)e^{\lambda L(1+K)}}\right)^2. \tag{27}$$

Далее, из свойств функций $\lim_{\Delta\to\infty}\psi(\Delta) = 0$ и $\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(\varepsilon) = +\infty$ следует, что для любого $\eta_2 > 0$ найдутся $\Delta_2(\eta_2) > 0$ и соответственно

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{\Delta_2}\right)^2 \tag{28}$$

такие, что для всех $\Delta \ge \Delta_2$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$ выполняется неравенство

$$\|\psi(\Delta(\varepsilon))\| \le \eta_2. \tag{29}$$

Из соотношений (26) и (29) следует, что для любого $0 < \eta < \rho$ и L найдутся значения $\eta_1 > 0$ и $\eta_2 > 0$ такие, что $\eta_1 + L\eta_2 e^{\lambda L(1+K)} \le \eta$. По ним, учитывая (27) и (28), определяем $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1;\varepsilon_2\}$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $t \in [0,T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, из неравенства (25) следует, что

$$\|x(t)-z(t)\| \le \eta < \rho.$$

Полученная оценка $\|x(t)-z(t)\| < \rho$ для всех $t \in [0,T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, означает, что для любого допустимого управления $u(t)$ решение $x(t)$ системы (1) находится в ρ-окрестности решения $z(t)$ усредненной системы (5) и не выходит на границу области D_x ни для какого момента времени. Следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, T]$ справедлива оценка (7). Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части теоремы проводится аналогично. При этом полученная оценка $\|x(t) - z(t)\| < \rho$ для всех $t \in [0, T]$ означает, что для любого допустимого управления $v(t)$ и решения $z(t)$ усредненной системы (5) соответствующее этому же управлению решение $x(t)$ системы (1) находится в ρ-окрестности решения $z(t)$ усредненной системы (5), которая в силу выполнения условия 4 теоремы полностью принадлежит области D_x. Значит, выбранное допустимое управление $v(t)$ усредненной системы (5) действительно является допустимым и для системы (1). Следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, T]$ справедлива оценка (7).

Теорема доказана.

4. Нахождение асимптотически оптимального решения задачи. Установим соотношение между оптимальными решениями задачи (1), (2) и усредненной задачи (5), (6).

Теорема 2. *Пусть для задач оптимального управления (1), (2) и (5), (6) в области* $D = \{t \geq 0, x \in D_x \subset R^n, y \in D_y \subset R^m, u \in U \subset \operatorname{comp}(R^r)\}$ *выполнены условия теоремы 1.*

Тогда оптимальное решение задачи (5), (6) является асимптотически оптимальным решением задачи (1), (2), т. е. для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливы оценки*

$$|J_0^* - J^*| \leq \eta, \quad J[v^*] - J^* \leq \eta, \tag{30}$$

где J_0^* *и* J^* *— оптимальные значения критериев качества усредненной задачи (5), (6) и задачи (1), (2) соответственно,* $J[v^*]$ *— значение критерия качества задачи (1), (2) на оптимальном управлении усредненной задачи.*

Доказательство. Пусть известны оптимальное управление $u^*(t)$, соответствующая оптимальная траектория $x^*(t)$ и оптимальное значение критерия качества $J^* = J[u^*]$ задачи (1), (2), а также оптимальное управление $v^*(t)$, соответствующая оптимальная траектория $z^*(t)$ и оптимальное значение критерия качества $J_0^* = J_0[v^*]$ усредненной задачи (5), (6).

При выполнении условий теоремы оптимальное управление $u^*(t)$ задачи (1), (2) является допустимым управлением для задачи (5), (6). Следовательно, для любых $\eta_0 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta_0, L) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, T]$ соответствующая этому управлению траектория $\tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(0) = x^*(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$, усредненной системы (5) удовлетворяет неравенству

$$\|x^*(t) - \tilde{z}(t)\| \leq \eta_0.$$

Неравенство выполняется для любого $t \in [0, T]$, а значит и для $t = T$. Следовательно, при выполнении условия теоремы

$$\begin{aligned} \left| J^* - \tilde{J}_0 \right| &= |J[u^*(t)] - J_0[u^*(t)]| = \\ &= |\varphi(x^*(T)) - \varphi(\tilde{z}(T))| \leq \lambda \|x^*(T) - \tilde{z}(T)\| \leq \lambda \eta_0 = \eta. \end{aligned} \tag{31}$$

Аналогично, оптимальное управление $v^*(t)$ задачи (5), (6) является допустимым управлением для задачи (1), (2). Следовательно, соответствующая этому управлению траектория $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = z^*(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$, системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\|z^*(t) - \tilde{x}(t)\| \le \eta_0$$

и, соответственно,

$$\left|J_0^* - \tilde{J}\right| = |J_0[v^*(t)] - J[v^*(t)]| =$$
$$= |\varphi(z^*(T)) - \varphi(\tilde{x}(T))| \le \lambda \|z^*(T) - \tilde{x}(T)\| \le \lambda\eta_0 = \eta. \tag{32}$$

Очевидно, что для оптимальных значений критериев качества (2) и (6) выполняются неравенства

$$J^* \le \tilde{J}, \quad J_0^* \le \tilde{J}_0 \tag{33}$$

и одно из соотношений

$$J^* \ge J_0^*, \quad J^* < J_0^*. \tag{34}$$

В первом случае из (33), (34), (32) следует цепочка неравенств

$$\tilde{J} \ge J^* \ge J_0^* \ge \tilde{J} - \eta,$$

откуда

$$|J_0^* - J^*| \le \eta.$$

Во втором случае из (33), (34), (31) следует цепочка неравенств

$$\tilde{J}_0 \ge J_0^* > J^* \ge \tilde{J}_0 - \eta,$$

откуда

$$|J_0^* - J^*| \le \eta.$$

Следовательно, в обоих случаях выполняется первое из неравенств (30). Выполнение второго неравенства в (30) следует из (32) и полученного неравенства.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу управления системой, содержащей быстрые и медленные переменные, вида

$$\dot{x}_1 = \varepsilon[(y_2 - y_1)x_2 + u_1 \sin x_2 + u_2 \cos x_2], \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\dot{x}_2 = \varepsilon\left[e^{-t}y_2x_1 + u_1 \cos x_2 - u_2 \sin x_2\right], \quad x_2(0) = x_2^0,$$

$$\dot{y}_1 = y_2 + 1, \quad y_1(0) = 0,$$

$$\dot{y}_2 = y_1, \quad y_2(0) = 0,$$

$$U = \{u(t)\colon \|u(t)\| \le 1\},$$

где

$$f(t,x,y) = \begin{pmatrix} (y_2 - y_1)x_2 \\ e^{-t} y_2 x_1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} \sin x_2 & \cos x_2 \\ \cos x_2 & -\sin x_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение вырожденной задачи в виде

$$h_1(t) = 0,5\, e^{t} - 0,5\, e^{-t},$$

$$h_2(t) = 0,5\, e^{t} + 0,5\, e^{-t} - 1.$$

Усредняя правые части уравнений медленной подсистемы вдоль решений вырожденной задачи, получаем усредненную задачу управления вида

$$\dot{z}_1 = \varepsilon \left[-z_2 + u_1 \sin z_2 + u_2 \cos z_2 \right], \quad z_1(0) = x_1^0,$$

$$\dot{z}_2 = \varepsilon \left[0,5\, z_1 + u_1 \cos z_2 - u_2 \sin z_2 \right], \quad z_2(0) = x_2^0.$$

В качестве допустимых управлений выберем функции

$$u = \begin{pmatrix} \cos 0,5\, t \\ \sin 0,5\, t \end{pmatrix}.$$

Сравним решение усредненной системы и данной системы по медленным переменным на одних и тех же управлениях. Для этого зададим $L = 1$ и начальные условия для медленных переменных $x_1 = 1,0$; $x_2 = -0,5$.

Результаты вычислений при различных значениях малого параметра ε представлены в таблице, где N — число шагов интегрирования данной системы, а N_0 — число шагов интегрирования усредненной системы в медленном времени.

ε	N	N_0	$\max\lvert x_1 - z_1\rvert$	$\max\lvert x_2 - z_2\rvert$	$\max\lVert x - z\rVert$
0,05	2 000	12	0,0706	0,0227	0,0716
0,03	3 333	21	0,0435	0,0198	0,0439
0,01	10 000	63	0,0255	0,0036	0,0261
0,005	20 000	127	0,0138	0,0018	0,0138

Сравнивая полученные результаты, можно сделать вывод, что при уменьшении значения малого параметра уменьшается и разность между решениями данной и усредненной задач. При этом количество вычислений, необходимых для получения результата в усредненной задаче, значительно меньше за счет перехода к медленному времени и численному интегрированию на конечном промежутке времени.

5. Заключение. Для решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными переменными вида (1), (2), в которые управление входит линейно, можно применять метод усреднения. Усредненная задача оптимального управления (5), (6) является автономной, содержит только медленную подсистему, поэтому решается гораздо проще данной. При этом оптимальное управление усредненной задачи при определенных условиях может быть взято в качестве асимптотически оптимального управления данной задачи. Это означает, что соответствующие траектории и значения критериев качества обеих задач являются достаточно близкими.

Литература

1. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
2. *Плотников В. А., Бойцова И. А.* Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 5. — С. 152–156.
3. *Добродзій Т. В.* Дослідження задач оптимального керування системами диференціальних рівнянь, лінійних по керуванню, методом усереднення // Укр. мат. вісн. — 2009. — **6**, № 2. — С. 150–172.
4. *Добродзій Т. В.* Метод усереднення в задачах керування періодичними системами // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 2. — С. 147–154.
5. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 576 с.

Получено 20.01.15,
после доработки — 14.10.15