УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of solutions of systems of the differential-functional equations $y'(t) = Ay(t) + By'(qt) + F(t, y(t), y(qt), y'(qt))$.

Встановлено нові властивості розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь $y'(t) = Ay(t) + By'(qt) + F(t, y(t), y(qt), y'(qt))$.

Эта статья является небольшим дополнением некоторых результатов работы [1] относительно асимптотических свойств решений системы

$$y'(t) = Ay(t) + By'(qt) + F\left(t, y(t), y(qt), y'(qt)\right), \tag{1}$$

где $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, B — постоянные $(n \times n)$-матрицы; A_1, A_2 — матрицы размеров $m \times m$, $(n-m) \times (n-m)$ соответственно и такие, что $\operatorname{Re}\lambda_j(A_1) < 0$, $j = \overline{1, m}$, $\operatorname{Re}\lambda_j(A_2) > 0$, $j = \overline{n-m, n}$; $0 < q < 1$; функция $F(t, y_1, y_2, y_3) : R \times C^n \times C^n \times C^n \to C^n$ непрерывна по всем аргументам, $F(t, 0, 0, 0) = 0$, и существует неубывающая непрерывная функция $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $h(0) = 0$, такая, что

$$|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3)| \leq h(r)(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|) \tag{2}$$

для всех $|x_i| \leq r$, $|y_i| \leq r$, $i = \overline{1, 3}$. Частные случаи этой системы изучались в [1–4].

В дальнейшем нам понадобится матричная функция

$$G(t) = \begin{cases} \operatorname{diag}(e^{A_1 t}, 0), & t > 0, \\ -\operatorname{diag}(0, e^{A_2 t}), & t < 0, \end{cases}$$

которая имеет такие свойства: $G(+0) - G(-0) = I_n$; $|G(t)| \leq Le^{-a|t|}$ при всех $t \neq 0$, где L, $a = \text{const} > 0$ и норма матрицы $G = (g_{ij})$ определяется с помощью соотношения $|G = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |g_{ij}|$; $G'(t) = AG(t)$, $t \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* $|B| + |BA|\dfrac{2L}{a} < 1$. *Тогда система (1) имеет* m*-параметрическое семейство ограниченных на полуоси* $t \geq 0$ *решений* $y(t, w)$, *где* $w = (w_1, \ldots, w_m)^T$, $|w| < r_1$, r_1 — *некоторое положительное число, для которых выполняется неравенство*

$$|y(t, w)| \leq L_1 \left(e^{-at} + \frac{e^{-aqt}}{1-q^2} + \frac{\beta_1 e^{-aq^2 t}}{1-q^4} + \ldots + \frac{\beta_1 \ldots \beta_m e^{-aq^{m+1} t}}{1-q^{2m+2}} + \ldots \right) |w|, \quad t \geq 0,$$

где L_1 *— некоторая постоянная,* $\beta_m = |B| + 2|BA|\dfrac{L}{a}\dfrac{1}{1-q^{2m}} + h_1\left(1 + 2\dfrac{L}{a}\dfrac{2+|A|}{1-q^{2m}}\right)$, $m \geq 1$, *коэффициент* $h_1 > 0$ *такой, что* $|B| + 2|BA|\dfrac{L}{a} + h_1\left(1 + 2\dfrac{L}{a}(2+|A|)\right) < 1$.

Любое решение системы (1), удовлетворяющее условиям $\sup_{t\geq 0}|y(t)| \leq r_2$ *и* $|y'(0)| < 2\{1+|A|/(1-|B|)\}r_2$, *где* r_2 *— некоторое положительное число, тождественно равно некоторому решению* $y(t, w_0)$.

Доказательство. Предположим, что решение системы (1) существует и ограничено на полуоси $t \geq 0$. Определим условия, при которых производная решения тоже ограничена. Пусть $k \overset{\mathrm{df}}{=} 2\{1 + |A|/(1-|B|)\}$, $r > 0$ удовлетворяет условию $h(kr) < t(1-|B|)/2$ и $\sup_{t\geq 0}|y(t)| \leq r$. Тогда если $|y'(0)| < kr$, то существует $\delta > 0$ такое, что $|y'(t)| \leq kr$ для всех $0 \leq t \leq \delta$, и в силу (2) при $0 \leq t \leq q^{-1}\delta$ выполняется неравенство

$$|y'(t)| \leq |A||y(t)| + |B||y'(qt)| + h(kr)(|y(t)| + |y(qt)| + |y'(qt)|) \leq$$
$$\leq |A|r + |B|\sup_{0\leq s\leq q^{-1}\delta}|y'(qs)| + h(kr)(2r + \sup_{0\leq s\leq q^{-1}\delta}|y'(qs)|),$$

откуда

$$\sup_{0\leq t\leq q^{-1}\delta}|y'(t)| \leq |A|r + |B|\sup_{0\leq s\leq q^{-1}\delta}|y'(s)| + h(kr)(2r + \sup_{0\leq s\leq q^{-1}\delta}|y'(s)|),$$

$$\sup_{0\leq s\leq q^{-1}\delta}|y'(s)| \leq \frac{|A| + 2h(kr)}{1-|B|-h(kr)}r \leq kr.$$

Повторяя этот процесс, получаем $\sup_{t\geq 0}|y'(t)| \leq kr$.

Поэтому „неоднородность" в уравнении (1) $z(t) \overset{\mathrm{df}}{=} By'(qt) + F(t, y(t), y(qt), y'(qt))$ при всех $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$|z(t)| \leq |B|kr + h(kr)(2r + kr) = \{|B|k + h(kr)(k+2)\}r, \tag{3}$$

и ограниченное решение $y(t)$ уравнения (1) $y'(t) = Ay(t) + z(t)$ имеет вид [7] (§ III. 6)

$$y(t) = e^{At}\pi_- y(0) + \int\limits_0^{+\infty} G(t-u)z(u)du, \tag{4}$$

где $\pi_- = \mathrm{diag}\,(I_m, 0)$, I_m — единичная $(m \times m)$-матрица.

Иными словами, любое решение уравнения (1), имеющее свойства $\sup_{t\geq 0}|y(t)| \leq r$ и $|y'(0)| < kr$, имеет вид (4) с некоторой ограниченной функцией $z(t)$ (3).

Для доказательства существования таких решений и их вычисления в работе [1] формула (4) используется как начальная замена переменных в исходном уравнении (1), после которой для новой искомой функции $z(t)$ авторы получают интегральное уравнение. Особое преимущество этого способа в том, что удается избавиться от производной в аргументе функции F. Наши рассуждения будут очень близки к таковым в работе [1]. Для краткости определим величину $\pi_- y(0) \overset{\mathrm{df}}{=} y_-$. Выполняя замену (4) в уравнении (1), получаем

$$z(t) = BAe^{Aqt}y_- + BAq\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z(qs)ds + Bz(qt)+$$

$$+F\left(t, e^{At}y_- + \int\limits_0^{+\infty} G(t-u)z(u)du, e^{Aqt}y_- + q\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z(qs)ds,\right.$$

$$\left. Ae^{Aqt}y_- + Aq\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z(qs)ds + z(qt)\right). \tag{5}$$

Если $\sup_{s\geq 0}|z(s)| \leq \rho$ и $|y_-| \leq \sigma\rho$, $0 < \sigma < 1$, то три последних аргумента функции F ограничены числом $\left\{(|A|+1)\,L\left(1+\dfrac{2}{a}\right)+1\right\}\rho \overset{\mathrm{df}}{=} l\rho$.

Определим оператор

$$Tz(t) = BAe^{Aqt}y_- + BAq\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z(qs)ds + Bz(qt)+$$

$$+F\left(t, e^{At}y_- + \int\limits_0^{+\infty} G(t-u)z(u)du, e^{Aqt}y_- + q\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z(qs)ds,\right.$$

$$\left. Ae^{Aqt}y_- + Aq\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z(qs)ds + z(qt)\right).$$

Оценим

$$|Tz(t)| \leq |BA|L\sigma\rho + |BA|\frac{2L}{a}\rho + |B|\rho + 3h(l\rho)l\rho = \left[|BA|L\sigma + |BA|\frac{2L}{a} + |B| + 3h(l\rho)l\right]\rho.$$

Поскольку $|B| + |BA|2L/a < 1$, при достаточно малых ρ и σ получаем неравенство $|Tz(t)| \leq \rho$.

Пусть $x : [0, +\infty) \to C^n$ — непрерывная функция и $\sup_{s\geq 0}|x(s)| \leq \rho$. Оценим разность

$$|Tx(t) - Tz(t)| \leq |BA|\frac{2L}{a}\sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)| + |B|\sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)|+$$

$$+h(l\rho)\left(\frac{2L}{a}\sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)| + \frac{2L}{a}\sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)| +\right.$$

$$\left.+|A|\frac{2L}{a}\sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)| + \sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)|\right) =$$

$$= \left[|BA|\frac{2L}{a} + |B| + h(l\rho)\left(\frac{2L}{a}(2+|A|)+1\right)\right]\sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \gamma \sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)|.$$

Так как $|B| + |BA|\dfrac{2L}{a} < 1$, при малом ρ выполняется неравенство

$$|Tx(t) - Tz(t)| \leq \gamma \sup_{s\geq 0}|x(s)-z(s)|, \quad \gamma < 1.$$

Поэтому T — оператор сжатия относительно равномерной топологии, действующий из множества, например W, непрерывных функций $z(t)$ с $\sup_{s\geq 0}|z(s)| \leq \rho$ в W, т. е. в W существует единственная неподвижная точка $Tz(t) = z(t)$ — решение уравнения (5).

Свойства функции $z(t)$ можно изучить с помощью последовательных приближений

$$z_0(t) = 0,$$

$$z_m(t) = BAe^{Aqt}y_- + BAq\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z_{m-1}(qs)ds + Bz_{m-1}(qt) +$$

$$+ F\left(t, e^{At}y_- + \int\limits_0^{+\infty} G(t-u)z_{m-1}(u)du, e^{Aqt}y_- + q\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z_{m-1}(qs)ds,\right.$$

$$\left. Ae^{Aqt}y_- + Aq\int\limits_0^{+\infty} G(q(t-s))z_{m-1}(qs)ds + z_{m-1}(qt)\right), \tag{6}$$

$$|z_1(t) - z_0(t)| = |z_1(t)| \leq |BA|Le^{-aqt}|y_-| + h(\rho)\left(Le^{-at}|y_-| + Le^{-aqt}|y_-| + |A|Le^{-aqt}|y_-|\right) \leq$$

$$\leq \{|BA| + h(l\rho)(2+|A|)\}Le^{-aqt}|y_-|.$$

Докажем методом математической индукции неравенство

$$|z_m(t) - z_{m-1}(t)| \leq Kb_0 \ldots b_{m-1}e^{-aq^m t}|y_-|, \quad m \geq 1, \tag{7}$$

где $K = \{|BA| + h(l\rho)(2+|A|)\}L, b_0 = 1, b_m = |B| + 2|BA|\dfrac{L}{a}\dfrac{1}{1-q^{2m}} + h(l\rho)\left(1 + 2\dfrac{L}{a}\dfrac{2+|A|}{1-q^{2m}}\right)$, $m \geq 1$. При $m = 1$ оценка (7) выполняется. Предположим, что она справедлива при m, и оценим разность

$$|z_{m+1}(t) - z_m(t)| \leq |BA|q\int\limits_0^{+\infty} |G(q(t-s))||z_m(qs) - z_{m-1}(qs)|ds + |B||z_m(qt) - z_{m-1}(qt)| +$$

$$+ h(l\rho)\left(\int\limits_0^{+\infty} |G(t-u)||z_m(u) - z_{m-1}(u)|du + \right.$$

$$+ q\int\limits_0^{+\infty}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+$$

$$+ |A|q\int\limits_0^{+\infty}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+|z_m(qt)-z_{m-1}(qt)|\Bigg)\le$$

$$\le |BA|q\int\limits_0^{t}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+$$

$$+ |BA|q\int\limits_t^{+\infty}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+|B||z_m(qt)-z_{m-1}(qt)|+$$

$$+ h(l\rho)\Bigg(\int\limits_0^{t}|G(t-u)||z_m(u)-z_{m-1}(u)|du+\int\limits_t^{+\infty}|G(t-u)||z_m(u)-z_{m-1}(u)|du+$$

$$+ q\int\limits_0^{t}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+q\int\limits_t^{+\infty}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+$$

$$+ |A|q\int\limits_0^{t}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+$$

$$+ |A|q\int\limits_t^{+\infty}|G(q(t-s))||z_m(qs)-z_{m-1}(qs)|ds+|z_m(qt)-z_{m-1}(qt)|\Bigg)\le$$

$$\le |BA|q\int\limits_0^{t}Le^{-aq(t-s)}K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m+1}s}|y_-|ds+$$

$$+ |BA|q\int\limits_t^{+\infty}Le^{-aq(s-t)}K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m+1}s}|y_-|ds+|B|K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m+1}t}|y_-|+$$

$$+ h(l\rho)\Bigg(\int\limits_0^{t}Le^{-a(t-u)}K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m}u}|y_-|du+\int\limits_t^{+\infty}Le^{-a(u-t)}K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m}u}|y_-|du+$$

$$+ q\int\limits_0^{t}Le^{-aq(t-s)}K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m+1}s}|y_-|ds+q\int\limits_t^{+\infty}Le^{-aq(s-t)}K\prod_{j=0}^{m-1}b_je^{-aq^{m+1}s}|y_-|ds+$$

$$+ |A|q \int\limits_0^t Le^{-aq(t-s)} K \prod_{j=0}^{m-1} b_j e^{-aq^{m+1}s} |y_-| ds + |A|q \int\limits_t^{+\infty} Le^{-aq(s-t)} K \prod_{j=0}^{m-1} b_j e^{-aq^{m+1}s} |y_-| ds +$$

$$+ K \prod_{j=0}^{m-1} b_j e^{-aq^{m+1}t} |y_-| \Bigg) = K \prod_{j=0}^{m-1} b_j |y_-| \Bigg\{ |BA| q L e^{-aq^{m+1}t} \frac{1 - e^{-aq(1-q^m)t}}{aq(1-q^m)} +$$

$$+ |BA| q L \frac{e^{-aq^{m+1}t}}{aq(1+q^m)} + |B| e^{-aq^{m+1}t} + h(l\rho) \Bigg(Le^{-aq^m t} \frac{1 - e^{-a(1-q^m)t}}{a(1-q^m)} + L \frac{e^{-aq^m t}}{a(1+q^m)} +$$

$$+ qLe^{-aq^{m+1}t} \frac{1 - e^{-aq(1-q^m)t}}{aq(1-q^m)} + qL \frac{e^{-aq^{m+1}t}}{aq(1+q^m)} + |A| q L e^{-aq^{m+1}t} \frac{1 - e^{-aq(1-q^m)t}}{aq(1-q^m)} +$$

$$+ |A| q L \frac{e^{-aq^{m+1}t}}{aq(1+q^m)} + e^{-aq^{m+1}t} \Bigg) \Bigg\} \le K \prod_{j=0}^{m-1} b_j e^{-aq^{m+1}t} |y_-| \Bigg\{ |B| + 2|BA| \frac{L}{a} \frac{1}{(1-q^m)(1+q^m)} +$$

$$+ h(l\rho) \left(1 + 2\frac{L}{a} \frac{1}{(1-q^m)(1+q^m)} + 2(1+|A|) \frac{L}{a} \frac{1}{(1-q^m)(1+q^m)} \right) \Bigg\} =$$

$$= K \prod_{j=0}^{m} b_j e^{-aq^{m+1}t} |y_-|.$$

Оценка (7) доказана.

Множитель $b_m \to |B| + 2|BA| \dfrac{L}{a} + h(l\rho) \left(1 + 2\dfrac{L}{a} (2 + |A|) \right) = \gamma < 1, m \to +\infty$, поэтому ряды

$$|z(t)| \le |z_0(t)| + |z_1(t) - z_0(t)| + |z_2(t) - z_1(t)| + \ldots + |z_m(t) - z_{m-1}(t)| + \ldots \le$$

$$\le K b_0 e^{-aqt} |y_-| + K b_0 b_1 e^{-aq^2 t} |y_-| + \ldots + K b_0 \ldots b_{m-1} e^{-aq^m t} |y_-| + \ldots =$$

$$= K \left(b_0 e^{-aqt} + b_0 b_1 e^{-aq^2 t} \ldots + b_0 \ldots b_{m-1} e^{-aq^m t} + \ldots \right) |y_-|$$

сходятся.

Оценим решение $y(t) = e^{At} y_- + \int_0^t G(t-u) z(u) du + \int\limits_t^{+\infty} G(t-u) z(u) du$:

$$|y(t)| \le Le^{-at} |y_-| + \int\limits_0^t |G(t-u)| |z(u)| du + \int\limits_t^{+\infty} |G(t-u)| |z(u)| du \le Le^{-at} |y_-| +$$

$$+ \int\limits_0^t Le^{-a(t-u)} K \left(b_0 e^{-aqu} + b_0 b_1 e^{-aq^2 u} + \ldots + b_0 \ldots b_{m-1} e^{-aq^m u} + \ldots \right) |y_-| du +$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} Le^{-a(u-t)}K\left(b_0e^{-aqu}+b_0b_1e^{-aq^2u}+\ldots+b_0\ldots b_{m-1}e^{-aq^mu}+\ldots\right)|y_-|du\le$$

$$\le L\left\{e^{-at}+\frac{2K}{a}\left(\frac{b_0e^{-aqt}}{1-q^2}+\frac{b_0b_1e^{-aq^2t}}{1-q^4}+\ldots+\frac{b_0\ldots b_{m-1}e^{-aq^mt}}{1-q^{2m}}+\ldots\right)\right\}|y_-|. \qquad (8)$$

Решение интегрального уравнения — это функция двух переменных $z(t,y_-)$. Изучим зависимость от второй переменной. Для этого определим функции

$$z_1(t,y_-)=BAe^{Aqt}y_-+F\left(t,e^{At}y_-,e^{Aqt}y_-,Ae^{Aqt}y_-\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=}z_1(t),$$

$$z_1(t,\tilde y_-)=BAe^{Aqt}\tilde y_-+F\left(t,e^{At}y_-,e^{Aqt}y_-,Ae^{Aqt}\tilde y_-\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\tilde z_1(t),$$

для которых справедлива оценка

$$|z_1(t)-\tilde z_1(t)|\le|BA|Le^{-aqt}|y_--\tilde y_-|+$$
$$+h(l\rho)\left(Le^{-at}|y_--\tilde y_-|+Le^{-aqt}|y_--\tilde y_-|+|A|Le^{-aqt}|y_--\tilde y_-|\right)\le$$
$$\le\{|BA|+h(l\rho)(2+|A|)\}Le^{-aqt}|y_--\tilde y_-|.$$

Докажем методом математической индукции неравенство

$$|z_m(t)-\tilde z_m(t)|\le Kc_{m-1}e^{-aq^mt}|y_--\tilde y_-|,\quad m\ge1, \qquad (9)$$

где $c_0=1$, $c_m=1+c_{m-1}b_m$, $m\ge1$. При $m=1$ оценка выполняется. Предположим, что она справедлива при m, тогда

$$|z_{m+1}(t)-\tilde z_{m+1}(t)|\le|BA|Le^{-aqt}\,|y_--\tilde y_-|+$$
$$+|BA|\,q\int\limits_0^{+\infty}|G\left(q(t-s)\right)|\,|z_m(qs)-\tilde z_m(qs)|\,ds+|B|\,|z_m(qt)-\tilde z_m(qt)|+$$
$$+h(l\rho)\Bigg(Le^{-at}\,|y_--\tilde y_-|+\int\limits_0^{+\infty}|G(t-u)||z_m(u)-\tilde z_m(u)|du+$$
$$+Le^{-aqt}|y_--\tilde y_-|+q\int\limits_0^{+\infty}|G(q(t-s))||z_m(qs)-\tilde z_m(qs)|ds+$$
$$+|A|Le^{-aqt}\,|y_--\tilde y_-|+|A|q\int\limits_0^{+\infty}|G\left(q(t-s)\right)|\,|z_m(qs)-\tilde z_m(qs)|\,ds+$$
$$+\ |z_m(qt)-\tilde z_m(qt)|\Bigg)\le\Bigg\{|BA|Le^{-aqt}+|BA|Kc_{m-1}q\times$$

$$\times \int\limits_0^t |G(q(t-s))| e^{-aq^{m+!}s} ds + |BA| K c_{m-1} q \int\limits_t^{+\infty} |G(q(t-s))| e^{-aq^{m+!}s} ds +$$

$$+ |B| K c_{m-1} e^{-aq^{m+1}t} + h(l\rho) \Bigg(L e^{-at} + K c_{m-1} \int\limits_0^t |G(t-u)| e^{-aq^m u} du +$$

$$+ K c_{m-1} \int\limits_t^{+\infty} |G(t-u)| e^{-aq^m u} du + L e^{-aqt} + K c_{m-1} q \int\limits_0^t |G(q(t-s))| e^{-aq^{m+1}s} ds +$$

$$+ K c_{m-1} q \int_t^{+\infty} |G(q(t-s))| e^{-aq^{m+1}s} ds + |A| L e^{-aqt} +$$

$$+ |A| K c_{m-1} q \int\limits_0^t |G(q(t-s))| e^{-aq^{m+1}s} ds + |A| K c_{m-1} q \int\limits_t^{+\infty} |G(q(t-s))| e^{-aq^{m+1}s} ds +$$

$$+ K c_{m-1} e^{-aq^{m+1}t} \Bigg) \Bigg\} |y_- - \tilde{y}_-| \leq \Bigg\{ |BA| L e^{-aqt} + |BA| K c_{m-1} q \int\limits_0^t L e^{-aq(t-s)} e^{-aq^{m+!}s} ds +$$

$$+ |BA| K c_{m-1} q \int\limits_t^{+\infty} L e^{-aq(s-t)} e^{-aq^{m+1}s} ds + |B| K c_{m-1} e^{-aq^{m+1}t} +$$

$$+ h(l\rho) \Bigg(L e^{-at} + K c_{m-1} \int\limits_0^t L e^{-a(t-u)} e^{-aq^m u} du + K c_{m-1} \int\limits_t^{+\infty} L e^{-a(u-t)} e^{-aq^m u} du +$$

$$+ L e^{-aqt} + K c_{m-1} q \int\limits_0^t L e^{-aq(t-s)} e^{-aq^{m+1}s} ds + K c_{m-1} q \int\limits_t^{+\infty} L e^{-aq(s-t)} e^{-aq^{m+1}s} ds +$$

$$+ |A| L e^{-aqt} + |A| K c_{m-1} q \int\limits_0^t L e^{-aq(t-s)} e^{-aq^{m+1}s} ds +$$

$$+ |A| K c_{m-1} q \int\limits_t^{+\infty} L e^{-aq(s-t)} e^{-aq^{m+1}s} ds + K c_{m-1} e^{-aq^{m+1}t} \Bigg) \Bigg\} |y_- - \tilde{y}_-| =$$

$$= \Bigg\{ |BA| L e^{-aqt} + |BA| K c_{m-1} q L e^{-aq^{m+1}t} \frac{1 - e^{-aq(1-q^m)t}}{aq(1-q^m)} +$$

$$+ |BA| K c_{m-1} q L \frac{e^{-aq^{m+1}t}}{aq(1+q^m)} + |B| K c_{m-1} e^{-aq^{m+1}t} +$$

$$+ h(l\rho)\Bigg(Le^{-at} + Kc_{m-1}Le^{-aq^m t}\frac{1-e^{-a(1-q^m)t}}{a(1-q^m)} + Kc_{m-1}L\,\frac{e^{-aq^m t}}{a(1+q^m)} +$$

$$+ Le^{-aqt} + Kc_{m-1}qLe^{-aq^{m+1}t}\frac{1-e^{-aq(1-q^m)t}}{aq(1-q^m)} + Kc_{m-1}qL\frac{e^{-aq^{m+1}t}}{aq(1+q^m)} +$$

$$+ |A|Le^{-aqt} + |A|Kc_{m-1}qLe^{-aq^{m+1}t}\frac{1-e^{-aq(1-q^m)t}}{aq(1-q^m)} +$$

$$+ |A|Kc_{m-1}qL\,\frac{e^{-aq^{m+1}t}}{aq(1+q^m)} + Kc_{m-1}e^{-aq^{m+1}t}\Bigg)\Bigg\}|y_- - \tilde{y}_-| \le$$

$$\le \Bigg\{|BA|L + h(l\rho)(2+|A|)L + Kc_{m-1}\Bigg[|B| + 2|BA|\frac{L}{a}\,\frac{1}{(1-q^m)(1+q^m)} +$$

$$+ h(l\rho)\left(1 + 2(2+|A|)\frac{L}{a}\,\frac{1}{(1-q^m)(1+q^m)}\right)\Bigg]\Bigg\}e^{-aq^{m+1}t}|y_- - \tilde{y}_-| =$$

$$= K(1 + c_{m-1}b_m)e^{-aq^{m+1}t}|y_- - \tilde{y}_-| = Kc_m e^{-aq^{m+1}t}|y_- - \tilde{y}_-|.$$

Оценка (9) доказана.

Исследуем последовательность $c_m = 1 + c_{m-1}b_m$, $c_0 = 1$. Нам известно, что существует $\lim_{m\to+\infty} b_m \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma < 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\gamma + \varepsilon < 1$, тогда существует $n_0 \in N$ такое, что $b_m < \gamma + \varepsilon\ \forall m \ge n_0$. Если число $M \ge 1$ такое, что $c_{n_0-1} \le \dfrac{M}{1-\gamma-\varepsilon}$, то $c_{n_0} = 1 + c_{n_0-1}b_{n_0} \le M + \dfrac{M}{1-\gamma-\varepsilon}(\gamma+\varepsilon) = \dfrac{M}{1-\gamma-\varepsilon}$ и т. д., т. е. все $c_m \le \dfrac{M}{1-\gamma-\varepsilon}$, $m \ge n_0 - 1$. Если для некоторого $m \ge n_0$ выполняется неравенство $c_m - c_{m-1} \le 0$, то $c_m - c_{m-1} = 1 - c_{m-1}(1-b_m) \le 0$, $c_{m-1} \ge \dfrac{1}{1-b_m}$, $c_m = 1 + c_{m-1}b_m \ge 1 + \dfrac{b_m}{1-b_m} = \dfrac{1}{1-b_m}$, $c_{m+1} - c_m = 1 - c_m(1-b_{m+1}) \le 1 - \dfrac{1-b_{m+1}}{1-b_m} = \dfrac{b_{m+1}-b_m}{1-b_m} \le 0$ и т. д., т. е. c_m — невозрастающая последовательность, ограниченная снизу нулем и поэтому имеющая предел. Если для всех $m \ge n_0$ выполняется неравенство $c_m - c_{m-1} \ge 0$, то c_m — неубывающая ограниченная последовательность и поэтому также имеющая предел. Устремляя $m \to +\infty$ в равенстве $c_m = 1 + c_{m-1}b_m$, получаем $\lim_{m\to+\infty} c_m = \dfrac{1}{1-\gamma}$.

Устремляя $m \to +\infty$ в (9), получаем

$$|z(t, y_-) - z(t, \tilde{y}_-)| \le \frac{K}{1-\gamma}|y_- - \tilde{y}_-|. \tag{10}$$

С помощью последнего неравенства легко доказывается непрерывность функции $z(t, y_-)$ по обеим переменным на множестве $t \ge 0$, $|y_-| \le \sigma\rho$.

Функция $y(0, y_-) = y_- + \displaystyle\int_0^{+\infty} G(-u)z(u, y_-)du$ — биекция между замкнутым шаром в пространстве C^m радиуса $\sigma\rho$ с центром в нуле и некоторым множеством $S(\rho)$ начальных значений ограниченных решений $y(t)$. Обратная функция — это проектор π_-. В силу (10) и неравенства

$$|y(0,y_-)-y(0,\tilde{y}_-)| \le |y_- - \tilde{y}_-| + \int\limits_0^{+\infty} |G(-u)||z(u,y_-)-z(u,\tilde{y}_-)|du \le$$

$$\le |y_- - \tilde{y}_-| + \int\limits_0^{+\infty} |G(-u)|\frac{K}{1-\gamma}|y_- - \tilde{y}_-|du \le \left(1+\frac{L}{a}\frac{K}{1-\gamma}\right)|y_- - \tilde{y}_-|$$

обе функции непрерывны, поэтому $y(0,y_-)$ — гомеоморфизм.

Из (10) получаем неравенство

$$|y(t,y_-)-y(t,\tilde{y}_-)| \le Le^{-at}|y_- - \tilde{y}_-| + \int\limits_0^{+\infty} |G(t-u)||z(u,y_-)-z(u,\tilde{y}_-)|du \le$$

$$\le L|y_- - \tilde{y}_-| + \int\limits_0^{+\infty} |G(t-u)|\frac{K}{1-\gamma}|y_- - \tilde{y}_-|du \le$$

$$\le L\left(1+\frac{2}{a}\frac{K}{1-\gamma}\right)|y_- - \tilde{y}_-|, \quad t \ge 0,$$

с помощью которого легко доказывается непрерывность функции $y(t,y_-)$ по обеим переменным на множестве $t \ge 0$, $|y_-| \le \sigma\rho$, т. е. $y(t,y_-)$ — m-параметрическое семейство функций.

Теорема 1 доказана.

Функции в доказательстве теоремы имеют дополнительные свойства.

Если матрица B невырожденная, то $\eta \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{|x|=1}|BAx| > 0$. При этом условии и достаточно малом ρ докажем от противного, что функции $z(t,y_-)$ различны для разных y_-. Предположим, что $z(t,y_-) \equiv z(t,\tilde{y}_-)$ для $y_- \ne \tilde{y}_-$. Тогда

$$|z(0,y_-)-z(0,\tilde{y}_-)| \ge |BA(y_- - \tilde{y}_-)| - h(l\rho)\left(|y_- - \tilde{y}_-| + |y_- - \tilde{y}_-| + |A||y_- - \tilde{y}_-|\right) =$$

$$= \left\{\left|BA\frac{(y_- - \tilde{y}_-)}{|y_- - \tilde{y}_-|}\right| - h(l\rho)(2+|A|)\right\}|y_- - \tilde{y}_-| \ge$$

$$\ge \{\eta - h(l\rho)(2+|A|)\}|y_- - \tilde{y}_-|.$$

При малом ρ коэффициент $\eta - h(l\rho)(2+A|) > 0$ и $z(0,y_-) \ne z(0,\tilde{y}_-)$. Пришли к противоречию.

Из (10) получаем неравенство

$$|y(0,y_-)-y(0,\tilde{y}_-)| \geq |y_- - \tilde{y}_-| - \int\limits_0^{+\infty} |G(-u)||z(u,y_-)-z(u,\tilde{y}_-)|du \geq$$

$$\geq |y_- - \tilde{y}_-| - \int\limits_0^{+\infty} |G(-u)|\frac{K}{1-\gamma}|y_- - \tilde{y}_-|du \geq \left(1-\frac{L}{a}\frac{K}{1-\gamma}\right)|y_- - \tilde{y}_-|.$$

Определим проектор $\pi_+ = \operatorname{diag}(0, I_{n-m})$, тогда $\pi_+ y(0,y_-) = \int_0^{+\infty} G(-u)z(u,y_-)du$ и

$$|\pi_+ y(0,y_-)| \leq \int\limits_0^{+\infty} |G(-u)||z(u,y_-)|du \leq \frac{L}{a}\frac{K}{1-\gamma}|y_-| = \frac{L}{a}\frac{K}{1-\gamma}|\pi_- y(0,y_-)|.$$

Оценим убывание ряда

$$e^{-at} + be^{-aqt} + b^2e^{-aq^2t} + b^3e^{-aq^3t} + \ldots + b^ne^{-aq^nt} + \ldots,$$

где $0 < b,\ q < 1$, применив формулу суммирования Эйлера – Маклорена [8] (§ 3.6) к функции $f(x) = b^x e^{-aq^x t}$. А именно,

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = \int\limits_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}f(0) - \frac{B_2}{2!}f'(0) +$$

$$+\frac{1}{2}f(n) + \frac{B_2}{2!}f'(n) - \int\limits_0^n f''(x)\frac{B_2(x-[x])}{2}dx.$$

Устремив $n \to +\infty$, в пределе получим

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(0) - \frac{B_2}{2!}f'(0) - \int\limits_0^{+\infty} f''(x)\frac{B_2(x-[x])}{2}dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}e^{-at} - \frac{B_2}{2!}e^{-at}(\ln b - at\ln q) - \int\limits_0^{+\infty} f''(x)\frac{B_2(x-[x])}{2}dx.$$

Вторая производная

$$f''(x) = f(x)(\ln b)^2 - f(x)q^x ta(2\ln b\ln q + (\ln q)^2) + f(x)q^{2x}t^2a^2(\ln q)^2.$$

Исследуем интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)q^{mx}\,dx$ как функцию от t, для краткости определив $c \overset{\mathrm{df}}{=} bq^m$:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)q^{mx}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} b^x e^{-aq^x t} q^{mx} dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} c^x e^{-aq^x t} dx = \{u = aq^x\} = \frac{c^{-\frac{\ln a}{\ln q}}}{\ln q^{-1}} \int\limits_0^{a} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}} e^{-ut} du =$$

$$= \frac{c^{-\frac{\ln a}{\ln q}}}{\ln q^{-1}} \int\limits_0^{+\infty} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}} e^{-ut} du - \frac{c^{-\frac{\ln a}{\ln q}}}{\ln q^{-1}} \int\limits_a^{+\infty} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}}\, e^{-ut} du.$$

Изучим каждый интеграл отдельно:

$$\int\limits_0^{+\infty} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}}\, e^{-ut}\,du = \{s = ut\} = \frac{1}{t^{\frac{\ln c}{\ln q}}} \int\limits_0^{+\infty} s^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}} e^{-s} ds = t^{-\frac{\ln c}{\ln q}} \Gamma\left(\frac{\ln c}{\ln q}\right),$$

$$\int\limits_a^{+\infty} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}} e^{-ut} du = \int\limits_a^{+\infty} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}} e^{-u(t-1)} e^{-u} du \le e^{-a(t-1)} \int\limits_a^{+\infty} u^{-1+\frac{\ln c}{\ln q}} e^{-u} du, \quad t \ge 1.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)q^{mx} dx = \frac{c^{-\frac{\ln a}{\ln q}}}{\ln q^{-1}} t^{-\frac{\ln c}{\ln q}} \Gamma\left(\frac{\ln c}{\ln q}\right) + O(e^{-at}) = O\left(t^{-\frac{\ln b}{\ln q} - m}\right), \quad t \to +\infty.$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |f''(x)| dx = \int\limits_0^{+\infty} \left| f(x)(\ln b)^2 - f(x)q^x ta(2\ln b \ln q + (\ln q)^2) + f(x)q^{2x} t^2 a^2 (\ln q)^2 \right| dx \le$$

$$\le (\ln b)^2 \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx + a\left(2\ln b \ln q + (\ln q)^2\right) t \int\limits_0^{+\infty} f(x)q^x dx +$$

$$+ a^2 (\ln q)^2 t^2 \int\limits_0^{+\infty} f(x) q^{2x} dx = O\left(t^{-\frac{\ln b}{\ln q}}\right), \quad t \to +\infty.$$

Суммируя изложенное, получаем

$$e^{-at} + be^{-aqt} + b^2 e^{-aq^2 t} + b^3 e^{-aq^3 t} + \ldots + b^n e^{-aq^n t} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) = O\left(t^{-\frac{\ln b}{\ln q}}\right), \quad t \to +\infty. \tag{11}$$

Качество этой формулы можно оценить на следующем примере. Уравнение $x'(t) = -ax(t) + bx(qt) + cx'(qt)$ имеет при $a > 0,\ b > 0,\ c \leq 0$ и $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$ частное решение $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-aq^k t}$, где $x_0 = 1,\ x_k = \dfrac{b - acq^{k-1}}{a(1-q^k)}\, x_{k-1},\ k \geq 1$. Все слагаемые этого ряда — положительные числа. При $c = 0$ [5] и $c < 0$ [6] это решение имеет асимптотическую формулу $x(t) = t^{-\frac{\ln\left|\frac{b}{a}\right|}{\ln q}} \left\{ f_0\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}$, $t \to +\infty$, где $f_0(u)$ — ненулевая периодическая функция с периодом 1. В то же время из формулы суммирования Эйлера – Маклорена следует, что $x(t) = \left(t^{-\frac{\ln\left|\frac{b}{a}\right|}{\ln q}+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, $t \to +\infty$.

Применив оценку (11) к неравенству (8), получим $|y(t, y_-)| \leq \Lambda(\varepsilon) t^{-\frac{\ln(\gamma+\varepsilon)}{\ln q}} |y_-|$.

Для исследования решений системы (1) в окрестности нуля усилим требование к неоднородности. Пусть выполняется неравенство

$$|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3)| \leq l_1 \left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|\right), \tag{12}$$

где l_1 — некоторая постоянная.

Теорема 2. *Если $|\lambda_j(B)| > q,\ j = \overline{1,n}$, то при достаточно малой l_1 все решения уравнения (1) имеют конечный предел при $t \to 0+$.*

Доказательство. Выполним замену переменных $y(t) = z(1/t)$, $t = 1/(q\tau)$:

$$z'(\tau) = \frac{1}{\tau^2} B^{-1} A z(q\tau) + q^2 B^{-1} z'(q\tau) + \frac{1}{\tau^2} B^{-1} F\left(\frac{1}{q\tau}, z(q\tau), z(\tau), z'(\tau)(-\tau^2)\right).$$

Отсюда и из (12) следует, что

$$\left(1 - \left|B^{-1}\right| l_1\right) \left|z'(\tau)\right| \leq \frac{1}{\tau^2}\left(\left|B^{-1}A\right| + \left|B^{-1}\right| l_1\right) \left|z(q\tau)\right| + \frac{1}{\tau^2}\left|B^{-1}\right| l_1 \left|z(\tau)\right| + \left|qB^{-1}\right| \left|qz'(q\tau)\right|.$$

Интегрируя последнее неравенство на отрезке $[1, t]$, получаем

$$(1 - |B^{-1}|l_1) \int\limits_1^t \left|z'(\tau)\right| d\tau \leq \left(|B^{-1}A| + |B^{-1}|l_1\right) \int\limits_1^t \frac{|z(q\tau)|}{\tau^2}\, d\tau + |B^{-1}|l_1 \int\limits_1^t \frac{|z(\tau)|}{\tau^2} d\tau +$$
$$+ |qB^{-1}| \int\limits_q^1 |z'(\tau)| d\tau + |qB^{-1}| \int\limits_1^{qt} |z'(\tau)||d\tau|. \tag{13}$$

Определим $\int_1^u |z'(\tau)||d\tau| \overset{\mathrm{df}}{=} s(u)$, $u > 0$. Тогда при $\tau > 0$ имеем $|z(\tau)| \leq |z(1)| + s(\tau)$. Если $1 \leq t \leq q^{-1}$, то $s(qt) = \int_1^{qt} |z'(\tau)||d\tau| = \int_{qt}^1 |z'(\tau)| d\tau \leq \int_q^1 |z'(\tau)| d\tau \overset{\mathrm{df}}{=} N \leq N + s(t)$. При

$t \geq q^{-1}$ получаем $s(qt) = \int_1^{qt} |z'(\tau)| d\tau \leq \int_1^t |z'(\tau)| d\tau = s(t) \leq s(t) + N$. Поэтому при $t \geq 1$ имеем $s(qt) \leq N + s(t)$.

Из (13) следует, что

$$\left(1 - \left|B^{-1}\right| l_1\right) s(t) \leq$$

$$\leq \left(\left|B^{-1}A\right| + \left|B^{-1}\right| l_1\right) \int\limits_1^t \frac{|z(1)| + N + s(\tau)}{\tau^2} d\tau + \left|B^{-1}\right| l_1 \int\limits_1^t \frac{|z(1)| + s(\tau)}{\tau^2} d\tau +$$

$$+ |qB^{-1}| \int\limits_q^1 |z'(\tau)| d\tau + |qB^{-1}| N + |qB^{-1}| s(t).$$

Без ограничения общности можем считать, что матрица B^{-1} имеет жорданову нормальную форму, у которой над главной диагональю не единицы, а достаточно малые числа $\varepsilon > 0$ такие, что выполняется неравенство $|qB^{-1}| < 1$. Тогда при малой l_1 получаем $|qB^{-1}| + |B^{-1}| l_1 < 1$, и последнее неравенство для $s(t)$ можно записать в виде

$$s(t) \leq \frac{|B^{-1}A| \int\limits_1^{+\infty} \frac{|z(1)|+N}{\tau^2} d\tau + |B^{-1}| l_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{2|z(1)|+N}{\tau^2} d\tau + |qB^{-1}| \int\limits_q^1 |z'(\tau)| d\tau + |qB^{-1}| N}{1 - |qB^{-1}| - |B^{-1}| l_1} +$$

$$+ \frac{|B^{-1}A| + 2|B^{-1}| l_1}{1 - |qB^{-1}| - |B^{-1}| l_1} \int\limits_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2} d\tau,$$

определив для краткости

$$M_1 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{|B^{-1}A| \int_1^{+\infty} \frac{|z(1)|+N}{\tau^2} d\tau + |B^{-1}| l_1 \int_1^{+\infty} \frac{2|z(1)|+N}{\tau^2} d\tau + |qB^{-1}| \int_q^1 |z'(\tau)| d\tau + |qB^{-1}| N}{1 - |qB^{-1}| - |B^{-1}| l_1},$$

$$L_1 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{|B^{-1}A| + 2|B^{-1}| l_1}{1 - |qB^{-1}| - |B^{-1}| l_1}.$$

Тогда $s(t) \leq M_1 + F_1 \int_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2} d\tau$. Отсюда и из леммы Гроноулла – Беллмана следует, что $\int_{1/t}^1 |y'(u)| du = \int_1^t |z'(\tau)||d\tau| = s(t) \leq M_1 e^{F_1 \int_1^t \frac{1}{s^2} ds} \leq M_1 e^{F_1 \int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2} ds}$.

Теорема 2 доказана.

1. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737 – 747.
2. *Бельский Д. В.* Об ограниченных на R^+ решениях линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом и их свойствах // Докл. АН Украины. — 2005. — № 8. — С. 10 – 14.

3. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Междунар. мат. конф. им. В. Я. Скоробагатько (27.09.2004 – 1.10.2004, Дрогобыч): Тез. докл. — Львов, 2004. — С. 52.
4. *Бельский Д. В.* О поведении решений систем линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом в окрестности особой точки // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 435 – 442.
5. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891 – 937.
6. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 466 – 493.
7. *Hale J.* Ordinary differential equations. — Malabar, Florida: Krieger Publ. Co., 1980. — 361 p.
8. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. — М.: Мир, 1961. — 247 с.

Получено 18.12.14