УДК 517.957

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We construct the Favard – Amerio theory for almost periodic differential equations in a Banach space without using $\mathcal{H}$-classes of these equations. For linear equations, we give the first examples of almost periodic operators that have no analogs in the classical Favard – Amerio theory.

Побудовано теорію Фавара – Амеріо для майже періодичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь. Для лінійних рівнянь уперше наведено приклади майже періодичних операторів, для яких немає аналогів у класичній теорії Фавара – Амеріо.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай E — банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел і $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел. Позначимо через C^0 банаховий простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через C^n, де $n \in \mathbb{N}$, — банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt}, \ldots, \dfrac{d^n x}{dt^n} \in$ $\in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^n} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}, \ldots, \left\|\frac{d^n x}{dt^n}\right\|_{C^0}\right\}.$$

У просторах $C^0, C^1, \ldots, C^n$ визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою формули

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Означення 1. *Елемент $y \in C^n$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається майже періодичним (за Бохнером) [1, 2], якщо замикання множини $\{S_h y\colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^n є компактною підмножиною цього простору, тобто з кожної послідовності $(S_{h_n} y)_{n\geq 1}$ можна вибрати збіжну в C^n підпослідовність.*

Множини майже періодичних елементів просторів $C^0, C^1, \ldots, C^n$ є підпросторами цих просторів відповідно з нормами $\|\cdot\|_{C^0}, \|\cdot\|_{C^1}, \ldots, \|\cdot\|_{C^n}$. Ці підпростори будемо позначати через $B^0, B^1, \ldots, B^n$ відповідно.

Нехай $B_{C^n}[a, r]$ — замкнена куля в C^n із центром у точці $a \in C^n$ і радіусом r, тобто множина $\{x \in C^n\colon \|x - a\|_{C^n} \leq r\}$.

Означення 2. *Оператор $H\colon C^n \to C^0$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається майже періодичним, якщо для кожних елемента $a \in C^n$, числа $r \in (0, +\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{x\in B_{C^n}[a,r]} \left\|S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x - S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x\right\|_{C^0} = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора H рівносильне означенню, що використовувалося Е. Мухамадієвим при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі C^0 [3].

Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset E$ і $R(x)$ — множина значень функції $x = x(t)$, тобто множина $\{x(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. Для компактних множин $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ позначимо через $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ множину всіх елементів $x \in C^n$, для кожного з яких $R(x) \subset K_0, R\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \ldots, R\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n$.

Зручним для теорії майже періодичних функцій є таке означення майже періодичного оператора, введене в розгляд автором у [4] у випадку дискретних рівнянь.

Означення 3. *Оператор $H\colon C^n \to C^0$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається майже періодичним, якщо для кожних множини $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ і послідовності $(h_{m_k})_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{m_{k_l}})_{l\geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}} \left\| S_{h_{m_{l_1}}} H S_{-h_{m_{l_1}}} x - S_{h_{m_{l_2}}} H S_{-h_{m_{l_2}}} x \right\|_{C^0} = 0.$$

Зазначимо, що майже періодичний за означенням 3 оператор H може не бути майже періодичним за означенням 2 (відповідні приклади наведено в п. 2 і 6).

Розглянемо відображення $F\colon \mathbb{R} \times E^{n+1} \to E$, що задовольняє умови:

1) множина $F(\mathbb{R} \times K_0 \times K_1 \times \ldots \times K_n)$ є обмеженою в E для всіх $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$;

2) функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ є елементом простору B^0 по змінній t рівномірно по $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K_0 \times K_1 \times \ldots \times K_n$ для всіх $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$, тобто з кожної послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел можна вибрати підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що залежить від $K_0, K_1, \ldots, K_n$, для якої

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ x_0\in K_0\\ x_1\in K_1\\ \cdots\\ x_n\in K_n}} \left\| F\Big(t + h_{k_{l_1}}, x_0, x_1, \ldots, x_n\Big) - F\Big(t + h_{k_{l_2}}, x_0, x_1, \ldots, x_n\Big) \right\|_E = 0. \tag{1}$$

Визначимо оператор $\mathcal{F}\colon C^n \to C^0$ за допомогою співвідношення

$$(\mathcal{F}x)(t) = F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки для кожних функції $x \in \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ і числа $h \in \mathbb{R}$

$$(S_h \mathcal{F} S_{-h} x)(t) = F\left(t + h, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

то завдяки (1)

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}} \left\| S_{h_{m_{l_1}}} \mathcal{F} S_{-h_{m_{l_1}}} x - S_{h_{m_{l_2}}} \mathcal{F} S_{-h_{m_{l_2}}} x \right\|_{C^0} = 0,$$

тобто оператор $\mathcal{F}$ є майже періодичним у сенсі означення 3.

Оператору $\mathcal{F}$ поставимо у відповідність диференціальне рівняння

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $y \in B^0$.

Метою статті є встановлення умов, при виконанні яких обмежені розв'язки рівняння (2) є майже періодичними. При дослідженні рівняння (2) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, множини значень яких є підмножинами компактних множин простору E.

2. Зв'язок між означеннями 2 і 3. Очевидно, що кожний майже періодичний за означенням 2 оператор $H\colon C^n \to C^0$ є майже періодичним і за означенням 3. Однак, обернене твердження хибне. Це підтверджується таким прикладом.

Приклад 1. Нехай банаховий простір E є таким, що існують елемент $\omega = \omega(t)$ простору C^n, послідовність $(h_n)_{n\geq 1}$ дійсних чисел і додатне число μ, для яких

$$\|\omega(h_{n_1}) - \omega(h_{n_2})\|_E \geq \mu,$$

якщо $n_1 \neq n_2$. Таким простором є кожний нескінченновимірний банаховий простір [5].

Розглянемо множину $\mathfrak{S}$ усіх елементів x простору C^n, для кожного з яких замикання множин $R(x),\ R\left(\dfrac{dx}{dt}\right), \ldots,\ R\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ є компактними підмножинами простору E.

Зафіксуємо довільний елемент a простору E і розглянемо елемент $b = b(t)$ простору C^0, для якого $b(t) = a$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Визначимо оператор $H\colon C^n \to C^0$ за допомогою рівності

$$Hx = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad x \in \mathfrak{S}, \\ \omega, & \text{якщо} \quad x \in C^n \setminus \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Очевидно, що для кожних множин $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$

$$\{S_h H S_{-h} x\colon h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{D}_{K_0, K_1, \ldots, K_n}\} = \{S_h H S_{-h} x\colon h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{S}\} = \{b\}.$$

Тому оператор $H\colon C^n \to C^0$ є майже періодичним у сенсі означення 3. Однак, цей оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, зафіксуємо довільний елемент $z \in C^0 \setminus \mathfrak{S}$. Очевидно, що

$$S_h H S_{-h} z = S_h \omega \tag{3}$$

для кожного $h \in \mathbb{R}$. Тому

$$\left\| S_{h_{m_1}} \omega - S_{h_{m_2}} \omega \right\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\omega(t + h_{m_1}) - \omega(t + h_{m_2})\|_E \geq \|\omega(h_{m_1}) - \omega(h_{m_2})\|_E \geq \mu,$$

якщо $m_1 \neq m_2$.

Отже, якщо $\{S_h z\colon h \in \mathbb{R}\} \subset B_{C^n}[b, r]$, де $r > \|z - \omega\|_{C^n}$, то

$$\sup_{x \in B_{C^n}[b,r]} \left\| S_{h_{m_1}} H S_{-h_{m_1}} x - S_{h_{m_2}} H S_{-h_{m_2}} x \right\|_{C^0} \geq \mu > 0,$$

для всіх не співпадаючих натуральних чисел m_1 і m_2. Звідси та із співвідношення (3) випливає, що оператор H не є майже періодичним у сенсі означення 2.

3. Функціонал δ. Нехай Λ — обмежена підмножина простору E і $\operatorname{diam}\Lambda$ — діаметр цієї множини, тобто число $\sup\{\|x_1 - x_2\|_E \colon x_1, x_2 \in \Lambda\}$.

Зафіксуємо множини $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ множину всіх розв'язків рівняння (2), для кожного з яких $R(x) \subset K_0,\ R\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \ldots,$ $R\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n$. Вважатимемо, що $N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n) \neq \varnothing$.

Розглянемо елемент $x^* \in N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n)$, для якого $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$, і додатне число

$$r\left(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n\right) = \max_{l \in \{0,1,\ldots,n\}} \sup\left\{\|x_l - y_l\|_E : x_l \in R\left(\frac{d^l x^*}{dt^l}\right),\ y_l \in K_l\right\},$$

де $\dfrac{d^0 x^*}{dt^0} = x^*$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in \left[0, r\left(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n\right)\right]$.

Позначимо через $\Omega\left(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon\right)$ множину всіх елементів $z \in C^n$, для кожного з яких $R(z) \subset K_0,\ R\left(\dfrac{dz}{dt}\right) \subset K_1, \ldots, R\left(\dfrac{d^n z}{dt^n}\right) \subset K_n$ і $\|z - x^*\|_{C^n} \geq \varepsilon$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)} \|\mathcal{F}z - \mathcal{F}x^*\|_{C^0}. \tag{4}$$

Тут $\mathcal{F}x^*$ можна замінити на y.

Зауваження 1. У випадку майже періодичного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(t, x(t)) = y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

що є окремим випадком рівняння (2), функціонал δ визначається за допомогою співвідношення

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(x^*, K_0, K_1, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t)}{dt} + f(t, z(t)) - y(t) \right\|_E.$$

Розглянутий функціонал будемо використовувати в подальших двох пунктах статті.

4. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (2), що на відміну від теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [6, 7]) не використовують $\mathcal{H}$-клас рівняння (2) та відокремленість розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Теорема 1. *Нехай* $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. *Якщо для розв'язку* $x^* \in N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ *диференціального рівняння (2)* $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$ *і*

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0 \tag{5}$$

для кожного $\varepsilon \in \big(0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n)\big)$, *то цей розв'язок є майже періодичним.*

Зауваження 2. Розв'язок $x^* \in N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ рівняння (2), для якого $\operatorname{diam} R(x^*) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $x^* \in N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ рівняння (2) не є елементом простору B^n. Тоді існує послідовність $\left(S_{h_p} x^*\right)_{p \geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p} x^*\right)_{p \geq 1}$ буде розбіжною в C^n. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r \geq 1},\ (q_r)_{r \geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, r)$, де $r = \operatorname{diam} \bigcup_{k=0}^{n} R\left(\dfrac{d^k x^*}{dt^k}\right)$,

$$\left\| S_{k_{p_r}} x^* - S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^n} \geq \gamma, \quad r \geq 1.$$

Тому

$$S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* \in \Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma), \quad r \geq 1.$$

Не обмежуючи загальності доведення, можна вважати, що на підставі включення $y \in B^0$

$$\lim_{r \to \infty} \left\| S_{-k_{p_r}} y - S_{-k_{q_r}} y \right\|_{C^0} = 0. \tag{6}$$

Зазначимо, що $r \leq r\left(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n\right)$. Не зменшуючи загальності, можна також вважати, що послідовність $(S_{k_p} \mathcal{F} S_{-k_p} x)_{p \geq 1}$ збігається рівномірно по x на $\mathfrak{D}_{K_0, K_1, \ldots, K_n}$. Тому

$$\lim_{p,q \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{D}_{K_0, K_1, \ldots, K_n}} \left\| S_{k_p} \mathcal{F} S_{-k_p} x - S_{k_q} \mathcal{F} S_{-k_q} x \right\|_{C^0} = 0. \tag{7}$$

Покажемо, що

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma) = 0. \tag{8}$$

Очевидно, що завдяки (4) і (7)

$$\begin{aligned} &\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma) = \\ &\quad = \inf_{z \in \Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma)} \|\mathcal{F} z - \mathcal{F} x^*\|_{C^0} \leq \left\| \mathcal{F} S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* - \mathcal{F} x^* \right\|_{C^0}, \quad r \geq 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{F} S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* - \mathcal{F} x^* \right\|_{C^0} = \\ &\quad = \left\| S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{p_r}} \mathcal{F} S_{-k_{p_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{q_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathcal{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} \leq \\ &\quad \leq \left\| S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{p_r}} \mathcal{F} S_{-k_{p_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathcal{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} + \\ &\qquad + \left\| S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathcal{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{q_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathcal{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} = \\ &\quad = \left\| \left(S_{k_{p_r}} \mathcal{F} S_{-k_{p_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - \left(S_{k_{q_r}} \mathcal{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} + \left\| S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} y - S_{-k_{q_r}} S_{k_{q_r}} y \right\|_{C^0} \leq \\ &\quad \leq \sup_{x \in \mathfrak{D}_{K_0, K_1, \ldots, K_n}} \left\| S_{k_{p_r}} \mathcal{F} S_{-k_{p_r}} x - S_{k_{q_r}} \mathcal{F} S_{-k_{q_r}} x \right\|_{C^0} + \left\| S_{-k_{p_r}} y - S_{-k_{q_r}} y \right\|_{C^0}, \quad r \geq 1, \end{aligned}$$

то на підставі (6), (7) і (9) справджується рівність (8). Це суперечить (5). Отже, припущення, що розв'язок $x^* \in N(F, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ рівняння (2) не є елементом простору B^0, хибне.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 3. Вимога виконання співвідношення (5) в теоремі 1 є суттєвою. У випадку її невиконання обмежені розв'язки рівняння (2) можуть не бути майже періодичними, що підтверджується таким прикладом.

Приклад 2. Розглянемо неперервне відображення $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якого $G(x,y)=0$, якщо $|x|\le 1$ і $|y|\le 1$. Це відображення, як і відображення F при $n=1$, задовольняє умови 1 і 2 з п.1. Очевидно, що кожна диференційовна на $\mathbb{R}$ функція $x^*=x^*(t)$, для якої $R(x^*)\subset[-1/4,1/4]$ і $R\left(\dfrac{dx^*}{dt}\right)\subset[-1/4,1/4]$, є розв'язком рівняння

$$G\left(x(t),\frac{dx(t)}{dt}\right)=0$$

і

$$\delta(x^*,K_0,K_1,\varepsilon)=0$$

для всіх $\varepsilon\in(0,r\,(x^*,K_0,K_1))$, де $K_0=K_1=[-1/2,1/2]$.

5. Випадок лінійного рівняння (2). Розглянемо майже періодичний у сенсі означення 3 лінійний неперервний оператор $\mathcal{L}\colon C^n\to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{L}z)(t)=A_0(t)z(t)+A_1(t)\,\frac{dz(t)}{dt}+\ldots+A_n(t)\frac{d^nz(t)}{dt^n},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Тут $A_0(t),A_1(t),\ldots,A_n(t)$ — такі неперервні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E,E)$, щоб оператор $\mathcal{L}$ був майже періодичним у сенсі означення 3 (ця вимога виконується, якщо, наприклад, операторні функції $A_0(t),A_1(t),\ldots,A_n(t)$ є майже періодичними в сенсі означення 1), і z — довільний елемент простору C^n.

Оператору $\mathcal{L}$ відповідає лінійне диференціальне рівняння

$$A_0(t)x(t)+A_1(t)\,\frac{dx(t)}{dt}+\ldots+A_n(t)\,\frac{d^nx(t)}{dt^n}=u(t),\quad t\in\mathbb{R},\tag{10}$$

де $u\in B^0$.

Рівняння (10) є окремим випадком рівняння (2). Тому до нього застосовна теорема 1.

Завдяки (4) та теоремі 1 справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $K_0,K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{K}$ і $u\in B^0$. Якщо для розв'язку x^* рівняння (10)* $\operatorname{diam}R(x^*)\ne 0,\ R(x^*)\subset K_0, R\left(\dfrac{dx^*}{dt}\right)\subset K_1,\ldots,R\left(\dfrac{d^nx^*}{dt^n}\right)\subset K_n$ *і*

$$\inf_{z\in\Omega(x^*,K_0,K_1,\ldots,K_n,\varepsilon)}\|\mathcal{L}z-u\|_{C^0}>0$$

для кожного $\varepsilon\in(0,r\,(x^*,K_0,K_1,\ldots,K_n))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Використаємо множину $\mathfrak{S}$, що визначена в п. 2, і підпростір $\mathfrak{S}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ простору C^n, породжений множиною $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$, де $K_0,K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{K}$.

Окремими випадками теореми 2 є такі два твердження.

Теорема 3. *Якщо $u\in B^0$, рівняння (10) має розв'язок $x^*\in\mathfrak{S}$ і виконується співвідношення*

$$\inf_{x\in\mathfrak{S},\,\|x\|_{C^n}=1}\|\mathcal{L}x\|_{C^0}>0,$$

то цей розв'язок є майже періодичним.

Теорема 4. *Якщо* $u \in B^0,\ K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$, *рівняння (10) має розв'язок* $x^* \in \in \mathfrak{S}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ *і виконується співвідношення*

$$\inf_{x \in \mathfrak{S}_{K_0,K_1,\ldots,K_n},\quad \|x\|_{C^n}=1} \|\mathcal{L}x\|_{C^0} > 0, \tag{11}$$

то цей розв'язок є майже періодичним.

Справді, нехай $K_0, K_1, \ldots, K_n$ — довільні елементи множини $\mathcal{K}$, для яких $R(x^*) \subset K_0$, $R\left(\dfrac{dx^*}{dt}\right) \subset K_1, \ldots,\ R\left(\dfrac{d^n x^*}{dt^n}\right) \subset K_n$. Завдяки (11) та лінійності оператора $\mathcal{L}$

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon > 0$. Тому на підставі теореми 2 розв'язок x^* рівняння (10) є майже періодичним.

Зауваження 4. Множина необоротних лінійних неперервних і майже періодичних у сенсі означення 3 операторів $\mathcal{L}\colon C^n \to C^0$, що задовольняють співвідношення (11), не є порожньою множиною, що підтверджується п. 6.

6. Приклади лінійних майже періодичних у сенсі означення 3 операторів. Спочатку покажемо існування неперервної та обмеженої на $\mathbb{R}$ функції $A(t)$ зі значеннями в $L(E,E)$ такої, що для кожного вектора $a \in E$ функція $A(t)a$ є майже періодичною в сенсі означення 1, а оператор $\mathcal{A}\colon C^0 \to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{A}x)(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

не є майже періодичним у сенсі означення 2 і є майже періодичним у сенсі означення 3.

Приклад 3. Будемо вважати, що $E = l_1$, де l_1 — банаховий простір обмежених числових послідовностей $z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots \rangle$, для кожної з яких $\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| < \infty$, з нормою $\|z\|_{l_1} = \sum_{m=1}^{\infty} |z_m|$. У цьому випадку функції $x(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t), \ldots \rangle$, для кожної з яких $x(t) \in l_1$ і $\lim_{\delta \to 0} \|x(t+\delta) - x(t)\|_{l_1} = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, а також $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_{l_1} < \infty$, є елементами простору C^0 і навпаки.

Розглянемо неперервну та обмежену на $\mathbb{R}$ функцію $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$, що визначається співвідношенням

$$A(t)z = \left\langle e^{it} z_1, e^{it/2} z_2, \ldots, e^{it/m} z_m, \ldots \right\rangle, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad z \in l_1. \tag{13}$$

Ця функція має такі властивості:

1) $\|A(t)\|_{L(l_1,l_1)} = 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}$;

2) для кожного $z \in l_1$ функція $A(t)z$ є майже періодичним елементом простору C^0;

3) для кожних компактної множини $K \subset l_1$ і послідовності $(h_m)_{m \geq 1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{m_l})_{l \geq 1}$ послідовності $(h_m)_{m \geq 1}$, для яких

$$\lim_{k,l \to \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| A(t + h_{m_k})z - A(t + h_{m_l})z \right\|_{l_1} = 0.$$

4) функція $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$ не є майже періодичною.

Перша властивість функції $A(t)$, очевидно, випливає із співвідношення (13).

Друга властивість функції $A(t)$ є наслідком таких міркувань.

Оскільки всі функції $e^{it/m},\ m \geq 1$, неперервні на $\mathbb{R}$,

$$\|A(t)z - A(t+h)z\|_{l_1} =$$
$$= \left\| \left\langle \left(e^{it} - e^{i(t+h)}\right)x_1, \left(e^{it/2} - e^{i(t+h)/2}\right)x_2, \ldots, \left(e^{it/m} - e^{i(t+h)/m}\right)x_m, \ldots \right\rangle \right\|_{l_1} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \left(e^{it/m} - e^{i(t+h)/m}\right)x_m \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| e^{it/m} - e^{i(t+h)/m} \right| |x_m|$$

і ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|$ збігається, то $\lim_{h\to 0} \|A(t)z - A(t+h)z\|_{l_1} = 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$. Тому функція $A(t)z$ є елементом простору C^0. Далі розглянемо довільну послідовність $(h_m)_{m\geq 1}$ дійсних чисел. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Існує такий номер $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, що $\sum_{m=m_\varepsilon+1}^{\infty} |x_m| < \varepsilon$. Оскільки функції $e^{it/m},\ m = \overline{1, m_\varepsilon}$, майже періодичні, то існує така підпослідовність $\left(h_{m_p}\right)_{p\geq 1}$ послідовності $(h_m)_{m\geq 1}$, що

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{m=\overline{1,m_\varepsilon}} \left| e^{i(t+h_{m_{p_k}})/m} - e^{i\left(t+h_{m_{p_l}}\right)/m} \right| = 0.$$

Тоді

$$\overline{\lim_{k,l\to\infty}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t + h_{m_{p_k}}\right)z - A\left(t + h_{m_{p_l}}\right)z \right\|_{l_1} \leq \sum_{m=m_\varepsilon+1}^{\infty} |x_m| < \varepsilon.$$

Із довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ випливає існування підпослідовності $\left(\tilde{h}_m\right)_{m\geq 1}$ послідовності $\left(\tilde{h}_m\right)_{m\geq 1}$, для якої

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t + \tilde{h}_{m_k}\right)z - A\left(t + \tilde{h}_{m_l}\right)z \right\|_{l_1} = 0.$$

Отже, $A(t)z$ — майже періодичний елемент простору C^0.

Третя властивість функції $A(t)$ випливає з таких міркувань.

Розглянемо довільні компактну множину $K \subset l_1$ і послідовність $(h_m)_{m\geq 1}$ дійсних чисел. Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Оскільки множина K є компактною, то існує скінченна множина $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{z_1, z_2, \ldots, z_{m(\varepsilon)}\}$ точок множини K, що буде для K ε-сіткою. Для кожної точки $z \in K$ позначимо через $a(z,\varepsilon)$ точку множини $\mathcal{Z}_\varepsilon$ з найменшим номером, для якої $\|z - a(z,\varepsilon)\|_{l_1} \leq \varepsilon$ (така точка, очевидно, визначається єдиним чином). Завдяки (13) та першій властивості функції $A(t)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)z - A(t)a(z,\varepsilon)\|_{l_1} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)(z - a(z,\varepsilon))\|_{l_1} \leq$$
$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|_{L(l_1,l_1)} \|(z - a(z,\varepsilon))\|_{l_1} = \|(z - a(z,\varepsilon))\|_{l_1} \leq \varepsilon \quad (14)$$

для всіх $z \in K$.

Оскільки функції $A(t)z_1, A(t)z_2, \ldots, A(t)z_{m(\varepsilon)}$ є майже періодичними елементами простору C^0 на підставі другої властивості функції $A(t)$, то існує така підпослідовність $\left(\tilde{h}_m\right)_{m\geq 1}$ послідовності $(h_m)_{m\geq 1}$, що

$$\lim_{k,l\to\infty} \max_{z\in\mathcal{Z}_\varepsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+\tilde{h}_k\right)z - A\left(t+\tilde{h}_l\right)z \right\|_{l_1} = 0. \tag{15}$$

Справді, завдяки другій властивості функції $A(t)$ існує підпослідовність $\left(h_m^{(1)}\right)_{m\geq 1}$ послідовності $(h_m)_{m\geq 1}$, для якої

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(1)}\right)z_1 - A\left(t+h_l^{(1)}\right)z_1 \right\|_{l_1} = 0.$$

На підставі цієї ж властивості існує підпослідовність $\left(h_m^{(2)}\right)_{m\geq 1}$ послідовності $\left(h_m^{(1)}\right)_{m\geq 1}$, для якої

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(2)}\right)z_2 - A\left(t+h_l^{(2)}\right)z_2 \right\|_{l_1} = 0.$$

Аналогічним чином, встановлюється існування послідовностей

$$\left(h_m^{(3)}\right)_{m\geq 1}, \ \left(h_m^{(4)}\right)_{m\geq 1}, \ \ldots, \ \left(h_m^{(m(\varepsilon))}\right)_{m\geq 1},$$

для яких

$$\left(h_m^{(2)}\right)_{m\geq 1} \supset \left(h_m^{(3)}\right)_{m\geq 1} \supset \left(h_m^{(4)}\right)_{m\geq 1} \supset \ldots \supset \left(h_m^{(m(\varepsilon))}\right)_{m\geq 1}$$

і

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(q)}\right)z_q - A\left(t+h_l^{(q)}\right)z_q \right\|_{l_1} = 0, \quad q = \overline{3, m(\varepsilon)}.$$

Звідси отримуємо співвідношення (15). Очевидно, що в (15) в якості $\tilde{h}_k$ можна взяти $h_k^{(m(\varepsilon))}$.

Із співвідношень (14) і (15) випливає, що

$$\overline{\lim_{k,l\to\infty}} \sup_{z\in K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)z - A\left(t+h_l^{(m(\varepsilon))}\right)z \right\|_{l_1} \leq 2\varepsilon. \tag{16}$$

Справді,

$$\begin{aligned}
&\sup_{z\in K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)z - A\left(t+h_l^{(m(\varepsilon))}\right)z \right\|_{l_1} = \\
&\quad = \sup_{z\in K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big\| A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)z - A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) + A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) - \\
&\qquad - A\left(t+h_l^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) + A\left(t+h_l^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) - A\left(t+h_l^{(m(\varepsilon))}\right)z \Big\|_{l_1} \leq \\
&\quad \leq \sup_{z\in K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)z - A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) \right\|_{l_1} + \\
&\qquad + \sup_{z\in K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\left(t+h_k^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) - A\left(t+h_l^{(m(\varepsilon))}\right)a(z,\varepsilon) \right\|_{l_1} +
\end{aligned}$$

$$+ \sup_{z\in K}\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\Big(t + h_l^{(m(\varepsilon))}\Big)\, a(z,\varepsilon) - A\Big(t + h_l^{(m(\varepsilon))}\Big) z \right\|_{l_1}.$$

Оскільки на підставі (14)

$$\sup_{z\in K}\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\Big(t + h_k^{(m(\varepsilon))}\Big) z - A\Big(t + h_k^{(m(\varepsilon))}\Big)\, a(z,\varepsilon) \right\|_{l_1} \leq \varepsilon$$

і

$$\sup_{z\in K}\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\Big(t + h_l^{(m(\varepsilon))}\Big)\, a(z,\varepsilon) - A\Big(t + h_l^{(m(\varepsilon))}\Big) z \right\|_{l_1} \leq \varepsilon,$$

а на підставі (15)

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{z\in K}\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| A\Big(t + h_k^{(m(\varepsilon))}\Big)\, a(z,\varepsilon) - A\Big(t + h_l^{(m(\varepsilon))}\Big)\, a(z,\varepsilon) \right\|_{l_1} = 0,$$

то справджується співвідношення (16). Із цього співвідношення та довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ випливає виконання третьої властивості функції $A(t)$.

Четверта властивість функції $A(t)$ є наслідком таких міркувань.

Для елементів

$$e_l = \langle \delta_{l1}, \delta_{l2}, \ldots, \delta_{lm}, \ldots \rangle, \quad l \geq 1,$$

простору l_1, де

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad l = m, \\ 0, & \text{якщо} \quad l \neq m, \end{cases}$$

послідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ натуральних чисел, для якої

$$n_{k+1} > n_k, \quad k \geq 1,$$

та кожної пари (k, l) натуральних чисел, для яких $k > l$, виконуються співвідношення

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t+n_k) - A(t+n_l)\|_{L(l_1,l_1)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\|x\|_{l_1}=1} \|A(t+n_k)x - A(t+n_l)x\|_{l_1} \geq$$

$$\geq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t+n_k)e_{n_k-n_l} - A(t+n_l)e_{n_k-n_l}\|_{l_1} =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| e^{i(t+n_k)/(n_k-n_l)} - e^{i(t+n_l)/(n_k-n_l)} \right| =$$

$$= \left| e^{in_k/(n_k-n_l)} - e^{in_l/(n_k-n_l)} \right| = \left| e^{i} - 1 \right| = 2\sin\frac{1}{2} > 0.$$

Це означає, що функція $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$ не є майже періодичною.

Отже, функція $A(t)$ задовольняє властивості 1) – 4).

Далі розглянемо оператор $\mathcal{A}\colon C^0 \to C^0$, що визначається співвідношенням (12).

Цей *оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2 і є майже періодичним у сенсі означення 3*.

Справді, для довільних $h \in \mathbb{R}$ і $x \in C^0$

$$(S_h \mathcal{A} S_{-h} x)(t) = A(t+h)x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси на підставі третьої властивості функції $A(t)$ отримуємо, що для кожних послідовності $(h_m)_{m\geq 1}$ дійсних чисел і компактної множини $K \subset l_1$ існує підпослідовність $(h_{m_l})_{l\geq 1}$ послідовності $(h_m)_{m\geq 1}$, для яких

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{z\in C^0,\ R(z)\subset K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t+h_{m_k})z(t) - A(t+h_{m_l})z(t)\|_{l_1} = 0.$$

Це означає, що оператор $\mathcal{A}\colon C^0 \to C^0$ *є майже періодичним у сенсі означення 3*.

Однак оператор $\mathcal{A}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2. Дійсно, для функції $\omega \in C^1$, для якої

$$\|\omega\|_{C^0} = 1, \tag{17}$$

і

$$\omega(l) = e_l, \quad l \geq 1, \tag{18}$$

і кожної пари (k,l) натуральних чисел, для яких $k > l$, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}\|S_k\mathcal{A}S_{-k} - S_l\mathcal{A}S_{-l}\|_{L(C^0,C^0)} &\geq \|S_k\mathcal{A}S_{-k}\omega - S_l\mathcal{A}S_{-l}\omega\|_{l_1} = \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t+k)\omega(t) - A(t+l)\omega(t)\|_{l_1} \geq \\ &\geq |A(k-l+k)\omega(k-l) - A(k-l+l)\omega(k-l)\|_{l_1} = \\ &= \|A(2k-l)e_{k-l} - A(k)e_{k-l}\|_{l_1} = \\ &= \left|e^{i(2k-l)/(k-l)} - e^{ik/(k-l)}\right| = \left|e^i - 1\right| = 2\sin\frac{1}{2} > 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Звідси випливає, що *оператор $\mathcal{A}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2*.

Зауваження 5. Звуження $\mathcal{A}|_{C^1}\colon C^1 \to C^0$ оператора $\mathcal{A}\colon C^0 \to C^0$ на C^1 також є майже періодичним оператором у сенсі означення 3 (це встановлюється аналогічно, як і у випадку оператора $\mathcal{A}\colon C^0 \to C^0$) і не є майже періодичним оператором у сенсі означення 2, що встановлюється з використанням співвідношень (19), функції $\omega \in C^1$, що задовольняє співвідношення (17) і (18), а також того, що для цієї функції

$$\|\omega\|_{C^1} \|S_k\mathcal{A}|_{C^1}S_{-k} - S_l\mathcal{A}|_{C^1}S_{-l}\|_{L(C^1,C^0)} \geq \|S_k\mathcal{A}S_{-k}\omega - S_l\mathcal{A}S_{-l}\omega\|_{C^0}.$$

У прикладі 4 покажемо існування необоротного лінійного майже періодичного в сенсі означення 3 оператора $\mathcal{D}\colon C^1 \to C^0$, що не є майже періодичним у сенсі означення 2 і задовольняє співвідношення (11) при $n = 1$.

Будемо використовувати локально збіжні послідовності функцій.

Послідовність елементів $x_k \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$, будемо називати *локально збіжною* до елемента $x \in C^0$ при $k \to \infty$, якщо ця послідовність обмежена і для кожного числа $T > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\leq T} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0.$$

Для такої послідовності будемо використовувати позначення

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0} x \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Аналогічно, послідовність $y_k \in C^1,\ k \in \mathbb{N}$, будемо називати *локально збіжною* до елемента $y \in C^1$ при $k \to \infty$ і позначати

$$y_k \xrightarrow{\text{loc.},\ C^1} y \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $y_k \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0} y$ і $\dfrac{dy_k}{dt} \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0} \dfrac{dy}{dt}$ при $k \to \infty$.

Приклад 4. Як і в прикладі 3, будемо вважати, що $E = l_1$. Розглянемо лінійний неперервний диференціальний оператор $\mathcal{D}\colon C^1 \to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{D}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + (\mathcal{B}x)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

в якому

$$\mathcal{B} = \mathcal{I} - \mathcal{A}, \tag{20}$$

де $\mathcal{I}\colon C^0 \to C^0$ — одиничний оператор і $\mathcal{A}\colon C^0 \to C^0$ — розглянутий у попередньому прикладі оператор.

Очевидно, що оператори $\dfrac{d}{dt} =\colon C^1 \to C^0$ і $\mathcal{I}\colon C^0 \to C^0$ є майже періодичними як у сенсі означення 2, так і в сенсі означення 3. Тому з урахуванням зауваження 5 диференціальний оператор $\mathcal{D}\colon C^1 \to C^0$ є майже періодичним у сенсі означення 3, і не є майже періодичним у сенсі означення 2.

Далі зафіксуємо довільні компактні множини $K_0, K_1 \subset l_1$, що не містять нульовий елемент $0 \in l_1$.

Покажемо, що для оператора $\mathcal{D}$ справджується співвідношення

$$\inf_{x \in \mathfrak{S}_{K_0,K_1},\quad \|x\|_{C^1}=1} \|\mathcal{D}x\|_{C^0} > 0, \tag{21}$$

аналогічне співвідношенню (11).

Припустимо, що це співвідношення не виконується, тобто існують функції $x_n \in C^1$ і $\varepsilon_n \in C^0,\ n \geq 1$, для яких

$$x_n \in \mathfrak{S}_{K_0,K_1}, \quad n \geq 1, \tag{22}$$

$$\|x_n\|_{C^1} = 1, \quad n \geq 1, \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\varepsilon_n\|_{C^0} = 0, \tag{24}$$

і

$$\frac{dx_n(t)}{dt} + x_n(t) - A(t)x_n(t) = \varepsilon_n(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Завдяки (22), (23) та узагальненій теоремі Арцела (див. [5], с. 99) існують такі підпослідовність $(x_{n_k})_{k\geq1}$ послідовності $(x_n)_{n\geq1}$ і функція $z \in C^0$ зі значеннями в K_0, що

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0} z \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{26}$$

Тоді завдяки (12), (13) і (20)

$$\mathcal{B}x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0} \mathcal{B}z \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{27}$$

Тому на підставі (24), (25) і (26) для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$z(t) - z(0) + \int\limits_0^t (\mathcal{B}z)(s)ds = 0.$$

Звідси та включення $\mathcal{B}z \in C^0$ випливає, що

$$\frac{dz(t)}{dt} + (\mathcal{B}z)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

і $z \in C^1$.

Зазначимо, що для функції z крім співвідношення $R(z) \subset K_0$ справджується співвідношення

$$R\left(\frac{dz}{dt}\right) \subset K_1. \tag{28}$$

Справді, завдяки (25), (24) і (27) послідовність $\left(\frac{dx_{n_k}}{dt}\right)_{k \geq 1}$ є локально збіжною до деякої функції $u \in C^0$ при $k \to \infty$. Тому

$$u(t) + (\mathcal{B}z)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$\frac{dz(t)}{dt} \equiv u(t).$$

Оскільки на підставі (22) $R\left(\frac{dx_{n_k}}{dt}\right) \subset K_1$ для всіх $k \geq 1$, то $R(u) \subset K_1$.

Таким чином, співвідношення (28) виконується і, отже,

$$z \in \mathfrak{S}_{K_0, K_1}. \tag{29}$$

Оскільки $0 \notin K_0 \cup K_1$, то існує $n_0 \in \mathbb{N}$, що для функції $z(t) = \big\langle z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{n_0}(t), \ldots \big\rangle$

$$z_{n_0}(0) \neq 0.$$

Функція $z_{n_0}(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{dx_{n_0}(t)}{dt} + \Big(1 - e^{it/n_0}\Big)x_{n_0}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тому для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$z_{n_0}(t) = e^{-\int_0^t (1 - e^{is/n_0})ds} z_{n_0}(0).$$

Отже,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |z_{n_0}(t)| = +\infty$$

і

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t)\|_{l_1} = +\infty,$$

що суперечить (29).

Отже, припущення про невиконання співвідношення (21) є хибним. Це означає, що на підставі теореми 4 *кожний розв'язок* $x^* \in \mathfrak{S}_{K_0,K_1}$ *диференціального рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} + (\mathcal{B}x)(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

з майже періодичним $y \in C^0$ *є майже періодичним елементом простору* C^1.

Нарешті покажемо, що оператор $\mathcal{D}\colon C^1 \to C^0$ не має неперервного оберненого.

Використаємо функції $\gamma_m(t) = \langle \gamma_{1,m}(t), \gamma_{2,m}(t), \ldots, \gamma_{k,m}(t), \ldots\rangle \in C^1,\ m \geq 1,$ для яких $\gamma_{k,m}(t) \equiv 0$, якщо $k \neq m$, і

$$\gamma_{m,m}(t) = \begin{cases} \cos^2 \dfrac{t}{\sqrt{m}}, & \text{якщо} \quad |t| \leq \dfrac{\pi}{2}\sqrt{m}, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| > \dfrac{\pi}{2}\sqrt{m}. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\|\gamma_m\|_{C^0} = 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{d\gamma_m}{dt} \right\|_{C^0} = 0$$

і

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \gamma_m(t) - e^{it/m}\gamma_m(t) \right| = 0.$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{D}\gamma_m\|_{C^0} = 0$$

і, отже,

$$\inf_{\|x\|_{C^1}=1} \|\mathcal{D}x\|_{C^0} = 0.$$

Це означає, що оператор $\mathcal{D}$ не має неперервного оберненого.

7. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Функціонали, аналогічні δ, застосовувалися автором у [4, 8 – 21] для дослідження майже періодичних різницевих, дискретних, функціональних, диференціальних та диференціально-різницевих рівнянь, а також диференціальних рівнянь із імпульсним збуренням.

Твердження про майже періодичні розв'язки рівнянь (2) і (10) (у п. 4 і 5) є новими. На відміну від теорем Амеріо [6, 7] і Фавара [7, 22] у теоремах 1 – 4 не використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь (2) і (10). Також у теоремі 1 не використовується умова відокремлення розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу рівняння (2).

Наведені в п. 6 приклади лінійних неперервних майже періодичного оператора в сенсі означення 3, що не є майже періодичним у сенсі означення 2 і діє у просторі C^0, і аналогічного необоротного диференціального оператора, до якого застосовна теорема 4, також є новими.

Дослідженню майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші результати про майже періодичні розв'язки отримано Фаваром у роботі [22], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [6]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь, а в [6] також використовується відокремленість обмежених розв'язків рівнянь. Вагомий додаток до теорії Фавара зроблено Е. Мухамадієвим [3]. Узагальнення теорем Мухамадієва наведено в [23 – 25]. Важливі результати з теорії майже періодичних рівнянь також належать Б. М. Левітану [2], Амеріо [26] та В. В. Жикову [27].

З'ясуванню умов існування обмежених і майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t) + h(t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $h \in C^0$ або $h \in B^0$ (у випадку $E = \mathbb{R}$), присвячено роботи [28, 29].

Література

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119 – 147; II Teil. – P. 383 – 409.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
3. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелін. коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407 – 418.
5. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
6. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. Mat. Pura Appl. (4). – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелін. коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 118 – 124.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелін. коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384 – 393.
12. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211 – 215.
13. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139 – 160.
14. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. математика. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179 – 192.
15. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277 – 285.

16. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелін. коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 112 – 119.

17. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних рівнянь, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 230 – 244.

18. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 838 – 848.

19. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та стійкі за Пуассоном розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1707 – 1714.

20. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки функціональних рівнянь // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 142 – 148.

21. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. математика. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125 – 138.

22. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta Math. – 1927. – **51**. – P. 31 – 81.

23. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116(158)**, № 4(12). – С. 483 – 501.

24. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(5). – С. 86 – 104.

25. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.

26. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. Mat. – 1960. – **30**. – P. 288 – 301.

27. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.

28. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **65**, № 1 – 3. – P. 333 – 341.

29. *Слюсарчук В. Ю.* Умови розв'язності нелінійних диференціальних рівнянь зі збуренням розв'язків у просторі обмежених на осі функцій // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9. – С. 1286 – 1296.

Одержано 07.12.14,
після доопрацювання — 15.10.16