УДК 517.983

УЗАГАЛЬНЕНЕ ОБЕРНЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов

Житомир. нац. агроекол. ун-т
Україна, 10008, Житомир, бульв. Старий, 7
e-mail: vfz2008@ukr.net

We find conditions on a Fredholm integral operator with degenerate kernel to have a generalized inverse on a Banach space. New results are presented, dealing with the generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernel. An example is considered in detail.

Установлены условия обобщенной обратимости интегральных операторов Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах. Получены новые результаты по обобщенному обращению интегральных операторов Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах. Подробно рассмотрен пример.

Фундаментальна робота Ф. Рісса [1], яка присвячена оберненню лінійних операторів $L = I - A$ (I — тотожний, а A — цілком неперервний оператори, що діють у просторі $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{R}^n)$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій зі значеннями у скінченновимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$), узагальнювалась у двох напрямках. З одного боку, простір $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{R}^n)$ замінювався більш загальними функціональними просторами, а з іншого — на оператор $A(L)$ накладалися менш обмежувальні умови.

Ю. Шаудер [2] узагальнив теорію Ф. Рісса на банахові простори, ввівши до неї спряжений оператор. С. М. Нікольський показав, що теорія Рісса – Шаудера залишається справедливою, якщо замість цілком неперервності оператора A припускати, що його деяка n-та ітерація $A^n = AA^{n-1}$ є цілком неперервною, а в [3] вказав необхідні і достатні умови, які повинен задовольняти оператор L, щоб ця теорія була справедливою. Цей клас операторів, які називають фредгольмовими, описує теорема, відома як теорема С. М. Нікольського [4, с. 233].

Відомо, що при побудові узагальнено-обернених операторів [5, 6] до нормально розв'язних класична конструкція Е. Шмідта [7, с. 339] застосовна лише до фредгольмових операторів. Тому задача про дослідження умов узагальненої оборотності та побудову узагальнено-оборотних операторів до інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у просторі $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій зі значеннями у нескінченновимірному банаховому просторі $\mathbf{B}$ є актуальною.

Постановка задачі. Нехай $z(t)$ — вектор-функція, яка діє з відрізка $[a,b]$ у дійсний банахів простір $\mathbf{B}$, $z(t) \in \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) := \{z(\cdot) \to \mathbf{B}, \|z\| = \sup_{t\in[a,b]} \|z(t)\|_{\mathbf{B}}\}$, $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$ — банахів простір неперервних на $[a,b]$ вектор-функцій.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}$ інтегральний оператор Фредгольма з вироджeним ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int\limits_a^b N(s)z(s)ds, \tag{1}$$

де оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють із банахового простору $\mathbf{B}$ у $\mathbf{B}$, сильно неперервні [8, с. 141] з нормами $|||M||| = \sup_{t\in[a,b]} \|M(t)\|_{\mathbf{B}} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t\in[a,b]} \|N(t)\|_{\mathbf{B}} = N_0 < \infty$.

Ставиться задача: встановити умови узагальненої оборотності інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі та побудувати узагальнено-обернений оператор до нього.

Попередні відомості. Нехай $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, причому ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ доповнювальні у просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ відповідно. Такі оператори називаються топологічно нетеровими [9], а за умови, що підпростори $N(L)$ та Y_L є лінійно ізоморфними, — топологічно фредгольмовими. Для цих класів операторів існують обмежені проектори [10, 11] $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$, які індукують розбиття $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ у прямі топологічні суми

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X_L, \quad \mathbf{B}_2 = Y_L \oplus R(L)$$

замкнених підпросторів $N(L)$ та X_L, Y_L та $R(L)$.

Нехай для підпросторів $N(L)$ та Y_L виконується одна з умов:

1) підпростір $N(L)$ лінійно ізоморфний доповнювальному в Y_L підпростору Y_1; $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$, $Y_L = Y_1 \oplus Y_2$;

2) підпростір Y_L лінійно ізоморфний доповнювальному в $N(L)$ підпростору $N_1(L)$; $Y_L \cong N_1(L) \subset N(L)$, $N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L)$;

3) нуль-простір $N(L)$ лінійно ізоморфний підпростору Y_L.

Продовжимо нулем на підпросторі X_L у випадках 1, 3, а на підпросторі $X_L \oplus N_2(L)$ у випадку 2 оператори, які здійснюють ізоморфізм підпростору $N_1(L) \subseteq N(L)$ на підпростір $Y_1 \subseteq Y_L$. Позначимо розширення цих операторів на увесь простір $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$. Аналогічно продовжимо нулем на підпросторі $Y_2 \oplus R(L)$ у випадку 1, а на підпросторі $R(L)$ у випадках 2, 3 оператори, які здійснюють ізоморфізм підпростору $Y_1 \subseteq Y_L$ на підпростір $N_1(L) \subseteq N(L)$. Позначимо розширення цих операторів на увесь простір $\mathbf{B}_2$ через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$.

Лема 1 [12]. *Нехай L — топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов 1 або 2. Тоді оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ має обмежений обернений*

$$\overline{L}^{-1}_{l,r} = \begin{cases} (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} & \text{— лівий, якщо} \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} & \text{— правий, якщо} \quad N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L. \end{cases}$$

Наслідок 1. *Нехай L — топологічно фредгольмовий оператор. Тоді оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ має обмежений обернений*

$$\overline{L}^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1}.$$

Дійсно, оскільки нуль-простір $N(L)$ лінійно ізоморфний підпростору Y_L, то за лемою 1 існують обмежені і лівий $\overline{L}_l^{-1}$, і правий $\overline{L}_r^{-1}$ обернені оператори, а отже, існує обмежений обернений оператор $(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1}$.

На основі леми 1 запропоновано конструкцію узагальнено-оберненого оператора до топологічно нетерового.

Теорема 1 [12]. *Нехай L — лінійний обмежений топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов 1 або 2. Тоді оператор*

$$L^- = \begin{cases} (L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}, & \textit{якщо} \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, & \textit{якщо} \quad N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L, \end{cases}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора L.

Якщо $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — топологічно фредгольмовий оператор, то ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ доповнювальні в банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ відповідно, а підпростір $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ лінійно ізоморфний підпростору $Y_L \subset \mathbf{B}_2$, $N(L) \cong Y_L$. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L) \subset \mathbf{B}_1$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L \subset \mathbf{B}_2$ та обмежені оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_1 \to Y_L$ і $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_2 \to N(L)$ і до оператора $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ існує обмежений обернений оператор $\overline{L}^{-1}$.

У цьому випадку теорема 1 формулюється таким чином.

Теорема 2. *Оператор*

$$L^- = \overline{L}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = (L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} \tag{2}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до топологічно фредгольмового оператора L.

Основний результат. Далі розглянемо умови, при яких інтегральний оператор (1) буде узагальнено-оборотним. Відомо [8, с. 141], що добуток $M(t)x$ сильно неперервної оператор-функції $M(t)$ на елемент $x \in \mathbf{B}$ є неперервною вектор-функцією. Тому оператор L діє з банахового простору $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$ у цей же простір.

Позначимо

$$D = I_{\mathbf{B}} - A, \quad A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds.$$

Лінійний оператор D діє з банахового простору $\mathbf{B}$ у $\mathbf{B}$ і є обмеженим. Дійсно,

$$\|D\| = \|I_{\mathbf{B}} - A\| \le \|I_{\mathbf{B}}\| + \|A\| \le 1 + \left\| \int_a^b N(t)M(t)dt \right\| \le$$

$$\le 1 + \int_a^b |||N(t)|||\,|||M(t)|||\,dt \le 1 + N_0 M_0 (b-a) < \infty.$$

Нехай оператор D є узагальнено-оборотним. Тоді існують обмежені проектори

$$\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B} \to N(D), \quad \|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{B}} = p < \infty,$$

$$\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B} \to Y_D, \quad \|\mathcal{P}_{Y_D}\|_{\mathbf{B}} = p_1 < \infty$$

та обмежений узагальнено-обернений оператор D^-, який можна побудувати за формулою (2).

Теорема 3. *Нехай $D : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — обмежений узагальнено-оборотний оператор. Тоді інтегральний оператор (1) є узагальнено-оборотним.*

Доведення. Для встановлення узагальненої оборотності інтегрального оператора (1) необхідно і достатньо [10, 11] показати, що існують обмежені проектори

$$\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) \to N(L) \quad \text{та} \quad \mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) \to Y_L.$$

Нехай $D : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — обмежений узагальнено-оборотний оператор. Покажемо, що оператори

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(s)z(s)ds,$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженими проекторами на нуль-простір $N(L)$ та підпростір Y_L інтегрального оператора (1) відповідно.

Доведення проведемо для оператора $\mathcal{P}_{N(L)}$. Спочатку покажемо, що цей оператор є проектором, тобто задовольняє умову $\mathcal{P}^2_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}$:

$$(\mathcal{P}^2_{N(L)}z)(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(s) \left\{ M(s)\mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau \right\} ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)} A \mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}[I_{\mathbf{B}} - D]\mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau = (\mathcal{P}_{N(L)}z)(t),$$

оскільки $\mathcal{P}^2_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D)}$, а $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$.

Далі покажемо, що проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ є обмеженим.

Зважаючи на зроблені вище припущення відносно оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та проектора $\mathcal{P}_{N(D)}$, покажемо обмеженість проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ у просторі $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$:

$$\|\mathcal{P}_{N(L)}\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})} = \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}),z\neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(L)}z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} =$$

$$= \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}),z\neq 0} \frac{\left\|M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds\right\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}),z\neq 0} \frac{|||M(t)|||\,\|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{B}_1}\int_a^b |||N(s)|||\,\|z(s)\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} \leq$$

$$\leq M_0N_0p(b-a)\sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}),z\neq 0} \frac{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} \leq M_0N_0p(b-a) < \infty.$$

Тепер покажемо, що проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ є проектором на нуль-простір $N(L)$ оператора L, тобто $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$:

$$(L\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)\int_a^b N(s)\left\{M(s)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau\right\}ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)A\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)[I_{\mathbf{B}} - D]\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds = 0,$$

оскільки $A = I_{\mathbf{B}} - D$, а $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$.

Доведення того, що оператор

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженим проектором на підпростір Y_L, проводиться аналогічно.

Оскільки проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$ обмежені, то інтегральний оператор (1) є узагальнено-оборотним [10, 11].

Наступна теорема дає конструкцію узагальнено-оберненого оператора L^- до інтегрального оператора (1).

Теорема 4. *Нехай* $D : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — *узагальнено-оборотний оператор. Тоді оператор*

$$(L^{-}f)(t) = f(t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds$$

є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора (1), де D^{-} — *обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора* D.

Доведення. Для доведення теореми необхідно і достатньо перевірити співвідношення $LL^{-}L = L$, яке визначає узагальнено-обернений оператор [10].

Спочатку обчислимо $L^{-}L$:

$$\begin{aligned}
(L^{-}Lz)(t) = {} & z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + \\
& + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(\tau)\left\{z(\tau) - M(\tau)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds\right\}d\tau = \\
& = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds - \\
& - M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(\tau)M(\tau)d\tau\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds - M(t)D^{-}A\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^{-}\big[I_{\mathbf{B}} - A\big]\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^{-}D\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)\big[I_{\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{N(D)}\big]\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds,
\end{aligned}$$

оскільки $D^{-}D = I_{\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{N(D)}$.

Таким чином,

$$(L^{-}Lz)(t) = z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds.$$

Далі обчислимо вираз $LL^{-}L$:

$$\begin{aligned}(LL^{-}Lz)(t) &= z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds - \\ &- M(t)\int\limits_a^b N(\tau)\left\{z(\tau) - M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds\right\}d\tau = \\ &= z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds - M(t)\int\limits_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau + \\ &+ M(t)A\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds - \\ &- M(t)\big[I_{\mathbf{B}} - A\big]\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\ &= z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds - M(t)D\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \\ &= z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = (Lz)(t),\end{aligned}$$

оскільки $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$.

Таким чином,

$$(LL^{-}Lz)(t) = (Lz)(t).$$

Обмеженість оператора L^{-} випливає з обмеженості оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та оператора D^{-}.

Теорему доведено.

В деяких випадках для побудови узагальнено-оберненого оператора L^{-} до інтегрального оператора (1) можна застосувати конструкцію, яка запропонована у теоремі 2. Розглянемо її у частинному випадку інтегрального оператора (1), коли обмежені оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ — зліченновимірні матриці, вектор-стовпці та вектор-рядки яких відповідно належать банаховому простору $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$, $\mathbf{B}$ — сепарабельний банаховий простір.

Знайдемо системи лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння

$$z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = 0 \tag{3}$$

та спряженого з ним [13, с. 287]

$$y(t) - N^*(t)\int\limits_a^b M^*(s)y(s)ds = 0. \tag{4}$$

Оскільки розглядається дійсний банаховий простір $\mathbf{B}$, то операція спряження „$*$” еквівалентна операції транспонування „T”. Тому вектор-стовпці та вектор-рядки зліченновимірних матриць $N^*(t)$ та $M^*(t)$ відповідно належать банаховому простору $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$.

Розв'язки рівнянь (3) та (4) шукатимемо у вигляді

$$z(t) = M(t)c, \tag{5}$$

$$y(t) = N^*(t)d, \tag{6}$$

де $c \in \mathbf{B}$, $d \in \mathbf{B}$.

Підставивши (5), (6) у (3) та (4) відповідно, отримаємо операторні рівняння відносно c та d:

$$Dc = 0, \quad D^*d = 0, \tag{7}$$

де $D = E_\infty - A$ $(D^* = E_\infty - A^*)$, $A = \displaystyle\int_a^b N(t)M(t)dt$. Оператор D — лінійний обмежений оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}$ у $\mathbf{B}$, E_∞ — зліченновимірна одинична матриця у просторі $\mathbf{B}$.

Як і раніше, від оператора D будемо вимагати узагальненої оборотності. Отже, нехай D — узагальнено-оборотний оператор. Тоді $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B} \to N(D)$ та $\mathcal{P}_{N(D^*)} : \mathbf{B} \to$ $\to N(D^*)$ — обмежені зліченновимірні матриці-проектори на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ матриць D та D^* відповідно.

Операторні рівняння (7) мають ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\mathcal{P}_{N(D)} \neq 0$, що нами і передбачається.

Позначимо через $\mathcal{P}_{N_0(D)}$ звуження оператора $\mathcal{P}_{N(D)}$ на підпростір $N_0(D)$, породжений системою лінійно незалежних вектор-стовпців матриці-проектора $\mathcal{P}_{N(D)}$. Аналогічно позначимо через $\mathcal{P}_{N_0(D^*)}$ звуження оператора $\mathcal{P}_{N(D^*)}$ на підпростір $N_0(D^*)$, породжений системою лінійно незалежних вектор-стовпців матриці-проектора $\mathcal{P}_{N(D^*)}$.

Враховуючи обмеженість проекторів $\mathcal{P}_{N(D)}$ та $\mathcal{P}_{Y_D}$, маємо

$$\|\mathcal{P}_{N_0(D)}\|_{\mathbf{B}} \le p < \infty, \quad \|\mathcal{P}_{N_0(D^*)}\|_{\mathbf{B}} \le p_1 < \infty.$$

Використовуючи оператори $\mathcal{P}_{N_0(D)}$ та $\mathcal{P}_{N_0(D^*)}$, загальні розв'язки рівнянь (7) можна зобразити у вигляді

$$c = \mathcal{P}_{N_0(D)} c_0, \quad d = \mathcal{P}_{N_0(D^*)} d_0, \tag{8}$$

де $c_0 \in N(D_0) \subseteq \mathbf{B}$ і $d_0 \in N(D_0^*) \subseteq \mathbf{B}$ — довільні сталі вектори.

Підставивши розв'язки (8) у (5), (6), отримаємо загальні розв'язки однорідних інтегральних рівнянь (3), (4)

$$z(t) = X(t)c_0, \quad y(t) = \Phi(t)\, d_0,$$

де оператор-функції $X(t) = M(t)\mathcal{P}_{N_0(D)}$, $\Phi(t) = N^*(t)\mathcal{P}_{N_0(D^*)}$ є операторами розв'язку однорідних рівнянь (3), (4) відповідно, стовпці яких — повні системи лінійно незалежних вектор-функцій, що складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^*. Оператор-функції $X(t)$ та $\Phi(t)$ є обмеженими, оскільки

$$|||X(t)||| = |||M(t)\mathcal{P}_{N_0(D)}||| \leq |||M(t)|||\, \|\mathcal{P}_{N_0(D)}\| \leq M_0 p,$$

$$|||\Phi(t)||| = |||N^*(t)\mathcal{P}_{N_0(D^*)}||| \leq |||N^*(t)|||\, \|\mathcal{P}_{N_0(D^*)}\| \leq N_0 p_1.$$

Для повних систем базисних вектор-стовпців, які складають матриці $X(t)$ та $\Phi(t)$, існують [14] біортогональні системи вектор-стовпців, які складають зліченновимірні матриці $\Gamma(t)$ та $\Psi(t)$ такі, що

$$\int_a^b \Gamma^*(t)X(t)dt = E_\infty, \quad \int_a^b \Phi^*(t)\Psi(t)dt = E_\infty,$$

де вектор-стовпці $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^\infty$ матриці $\Gamma(t)$ та $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^\infty$ матриці $\Phi(t)$ складаються з неперервних функцій, причому [14, с. 79]

$$\sup_i \|\gamma_i\| = \Gamma_0 < \infty, \quad \sup_j \|\varphi_j\| = \Phi_0 < \infty.$$

Побудуємо проектори [6; 15, с. 168] $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) \to Y_L$ та оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) \to Y_L$, $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}) \to N(L)$

$$\begin{gathered}
(\mathcal{P}_{N(L)} z)(t) = X(t)(\Gamma z)(\cdot) = X(t)\int_a^b \Gamma^*(s)z(s)ds, \\
(\mathcal{P}_{Y_L} y)(t) = \Psi(t)(\Phi y)(\cdot) = \Psi(t)\int_a^b \Phi^*(s)y(s)ds, \\
(\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} z)(t) = \Psi(t)(\Gamma z)(\cdot) = \Psi(t)\int_a^b \Gamma^*(s)z(s)ds, \\
(\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} y)(t) = X(t)(\Phi y)(\cdot) = X(t)\int_a^b \Phi^*(s)y(s)ds.
\end{gathered} \tag{9}$$

Зважаючи на зроблені вище припущення відносно оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$, доведемо, наприклад, обмеженість проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ у просторі $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$:

$$\|\mathcal{P}_{N(L)}\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})} = \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}), z\neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(L)}z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} =$$

$$= \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}), z\neq 0} \frac{\left\| X(t)\int_a^b \Gamma(s)z(s)ds \right\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}), z\neq 0} \frac{\|X(t)\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}\int_a^b \|\Gamma(s)\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}\|z(s)\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}), z\neq 0} M_0\Gamma_0 p_0(b-a)\frac{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})}} \leq M_0\Gamma_0 p(b-a).$$

Аналогічно показується обмеженість проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$, операторів $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ та $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$. З обмеженості проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_Y$ маємо, що нуль-простір $N(L)$ та підпростір Y_L доповнювальні у просторі $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B})$. Таким чином, оператор L є узагальнено-оборотним.

Оскільки нуль-простір $N(L)$ лінійно ізоморфний підпростору Y_L, то за наслідком 1 з леми 1 існує обмежений оператор $(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1}$ до оператора

$$(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})z(t) = z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds + \Psi(t)\int_a^b \Gamma^*(s)z(s)ds.$$

Для знаходження оберненого оператора $(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1}$ до оператора $(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})$ запишемо його у вигляді

$$(\overline{L}z)(t) = [(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})z](t) = z(t) - \overline{M}(t)\int_a^b \overline{N}(s)z(s)ds, \tag{10}$$

де $\overline{M}(t)$ — матриця, яка складена з елементів матриць $M(t)$ та $-\Psi(t)$, $\overline{N}(s)$ — матриця, яка складена з елементів матриць $N(s)$ та $\Gamma^*(s)$.

Обернений оператор до оператора (10) можна записати у вигляді

$$z(t) = f(t) + \overline{M}(t)S^{-1}\int_a^b \overline{N}(s)f(s)ds,$$

де S^{-1} — оператор, обернений до оператора

$$S = I - B, \quad B = \int_a^b \overline{N}(t)\overline{M}(t)dt.$$

Тоді за теоремою 2 узагальнено-обернений оператор до оператора L має вигляд

$$(L^{-}f)(t) = ((L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)})f)(t) = f(t) + \overline{M}(t)S^{-1}\int\limits_a^b \overline{N}(s)f(s)ds -$$

$$- X(t)\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = f(t) + M_1(t)\int\limits_a^b N_1(s)f(s)ds,$$

де $M_1(t)$ — матриця, яка складена з елементів матриць $\overline{M}(t)S^{-1}$ та $-X(t)$, $N_1(s)$ — матриця, яка складена з елементів матриць $\overline{N}(s)$ та $\Phi^*(s)$.

Приклад. Проілюструємо побудову узагальнено-оберненого оператора L^{-} до інтегрального оператора

$$(Lz)(t) = z(t) - M(t)\int\limits_0^2 N(s)z(s)ds, \tag{11}$$

де

$$M(t) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & \dfrac{t}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & \dfrac{t}{2}\end{pmatrix}, \ldots\right\},$$

$$N(s) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{3(s-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{3(s-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

— зліченновимірні матриці, які діють із банахового простору $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ в $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ з нормами $|||M|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]}\|M(t)\|_{\mathbf{c}}$, $|||N|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]}\|N(t)\|_{\mathbf{c}}$.

Із визначення матриць $M(t)$ та $N(t)$ маємо

$$|||M|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2],i,j\in\mathbb{N}} |m_{ij}(t)| = \sup_{t\in[0,2]}|t| \le 2,$$

$$|||N|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2],i,j\in\mathbb{N}} |n_{ij}(t)| = \sup_{t\in[0,2]}\left|\frac{3(t-1)}{2}\right| \le \frac{3}{2}.$$

Тоді

$$\|L\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{z\in\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c}),z\neq 0} \frac{\|Lz\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}} =$$

$$= \sup_{z\in\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c}),z\neq 0} \frac{\left\|z(t) + M(t)\int_0^2 N(s)z(s)ds\right\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c}),z\neq 0} \left\{1 + \frac{\|M(t)\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}\int_0^2 \|N(s)\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}\|z(s)\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}}\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c}),z\neq 0} \frac{(1+6)\|z\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})}} \leq 7.$$

Таким чином, оператор L є лінійним обмеженим оператором, який діє з банахового простору неперервних на проміжку $[0,2]$ функцій $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ в $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$. Нескінченновимірні підпростори $N(L)$ та Y ізоморфні як підпростори сепарабельного банахового простору $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ [4, с. 55].

Оператор

$$D = I_{\mathbf{c}} - A, \quad A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds$$

має вигляд

$$D = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

і діє з банахового простору $\mathbf{c}$ обмежених послідовностей $x = \{\xi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, що збіжні до скінченної межі, у простір $\mathbf{c}$ таких же послідовностей $y = \{\eta^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, $D : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$.

Очевидно, що оператор D є обмеженим у цьому просторі.

Спряжений оператор D^* до оператора D діє з простору $\mathbf{l}_1$ у простір $\mathbf{l}_1$ і має вигляд

$$D^* = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

Простори $\mathbf{c}$ та $\mathbf{l}_1$ сепарабельні, тому для операторів D та D^* можна побудувати матриці X та Φ, які складені з базисних елементів нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ відповідно:

$$X = \operatorname{diag}\{X_{4\times 2}, X_{4\times 2}, \ldots\}, \quad \Phi = \operatorname{diag}\{\Phi_{4\times 2}, \Phi_{4\times 2}, \ldots\},$$

де

$$X_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо біортогональні матриці: $\varGamma$ до матриці X, $\varGamma(X) = \varGamma^* X = E_\infty$, та $\varPsi$ до матриці $\varPhi$, $\varPhi(\varPsi) = \varPhi^* \varPsi = E_\infty$:

$$\varGamma = \operatorname{diag}\left\{\varGamma_{4\times2}, \varGamma_{4\times2}, \ldots\right\}, \quad \varPsi = \operatorname{diag}\left\{\varPsi_{4\times2}, \varPsi_{4\times2}, \ldots\right\},$$

де

$$\varGamma_{4\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varPsi_{4\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проектори $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{c} \to N(D)$ і $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{c} \to Y_D$ будуть мати вигляд

$$\mathcal{P}_{N(D)} = X\varGamma^* = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_D} = \varPsi\varPhi^* = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

Проектор $\mathcal{P}_{N(D)}$ обмежений у просторі $\mathbf{c}$, оскільки

$$\|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{c}} = \sup_{x\in\mathbf{c}, x\neq0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(D)}x\|_{\mathbf{c}}}{\|x\|_{\mathbf{c}}} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbf{c}, x\neq0} \frac{\sup\limits_{i\in N}(|\xi^{(1)}|, |-\xi^{(1)}|, |\xi^{(3)}|, |-\xi^{(3)}|, \ldots)}{\sup\limits_{i\in N}|\xi_i|} \leq \frac{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(j)}|}{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(i)}|} = 1.$$

Аналогічно проектор $\mathcal{P}_{Y_D}$ теж обмежений у просторі $\mathbf{c}$.

Оскільки проектори $\mathcal{P}_{N(D)}$ та $\mathcal{P}_{Y_D}$ обмежені, то підпростори $N(D)$ та $R(D)$ доповнювальні у банаховому просторі $\mathbf{c}$.

За формулами, які аналогічні формулам (9), побудуємо оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N(D)} : \mathbf{c} \to N(D)$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_D} : \mathbf{c} \to Y_D$:

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(D)} = X\varPhi^* = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ldots\right\},$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_D} = \varPsi\varGamma^* = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

Очевидно, що оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N(D)}$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_D}$ також обмежені у просторі $\mathbf{c}$. Тоді матричний оператор $\overline{D}$ матиме вигляд

$$\overline{D} = D + \overline{\mathcal{P}}_{Y_D} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\},$$

а обернений до нього

$$\overline{D}^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

Отже, за теоремою 2 обмежений узагальнено-обернений оператор D^- запишеться у вигляді

$$D^- = \overline{D}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(D)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

За теоремою 4 отримаємо узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора (11)

$$(L^- f)(t) = f(t) + \widetilde{M}(t)\int_0^2 N(s)z(s)ds,$$

де

$$\widetilde{M}(t) = M(t)D^- = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

1. *Рисс Ф.* О линейных функциональных уравнениях // Успехи мат. наук. — 1936. — Вып. 1. — С. 175 – 199.
2. *Shauder J.* Über lineare vollstetige Functional operationen // Stud. Math. — 1930. — № 2. — P. 183 – 196.
3. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. — 1943. — **7**, № 3. — С. 147 – 163.
4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. – 495 с.
5. *Ben Israel, Greville T. N. E.* Generalized inverses. Theory and applications. — New York: Wiley Intersci., 1974. — 395 p.
6. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV+317 p.
7. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
9. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Топологические нетеровы операторы: обобщенная обратимость и аддитивное представление // Изв. вузов. — 1994. — № 6. — С. 3 – 7.
10. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
11. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. — 2007. — Вип. 13. — С. 78 – 116.
12. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — 2012. — **65**, № 2. — С. 163 – 174.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
14. *Гринблюм М. М.* Биортогональные системы в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. — 1945. — **47**, № 2. — С. 79 – 82.
15. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных n- (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 2. — С. 167 – 182.

Одержано 27.05.14