УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ЗЛІЧЕННОГО ЧИСЛА ЦИКЛІВ У ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

І. І. Клевчук

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: klevchuk@yandex.ru

We prove that hyperbolic system of first order differential equations with periodic condition have a countable number of periodic colutions. We consider the problem of existence and stability of traveling waves for a quasilinear Korteweg — de Vries equation with transformed argument and for the equation of spin combustion.

Доказано существование счетного числа периодических решений гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка с периодическим условием. Изучены вопросы существования и устойчивости бегущих волн квазилинейного уравнения Кортевега — де Фриза с преобразованным аргументом и уравнения спинового горения.

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь та параболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [1–5]. У цій статті досліджено існування та стійкість зліченного числа циклів для деяких класів гіперболічних систем з перетвореним аргументом. Такі задачі у простіших випадках розглядалися в [6]. Подібні задачі для інших класів диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [7–9].

1. Існування зліченного числа циклів гіперболічної системи першого порядку. Нехай $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний простір з нормою $|u| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ — простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою $\|\varphi\| = \sup_{-\Delta\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$. Позначимо через u_x елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_x(t,\theta) = u(t, x+\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$.

Розглянемо гіперболічну систему з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial u}{\partial x} + B(\varepsilon)u + F(u_x, \varepsilon) \tag{1}$$

та періодичною умовою

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x), \tag{2}$$

де ε — малий додатний параметр, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $F : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються такі умови:

1) $F(\varphi, \varepsilon) = O(\|\varphi\|^2)$ при $\|\varphi\| \to 0$, оператор F п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів;

2) матриця $B(\varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε, має пару власних значень вигляду $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, а інші власні значення λ задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda < -2\gamma_0 < 0$.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \xi(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\xi(y)$ має період 2π. Підставляючи $u = \xi(y)$ у рівняння (1), одержуємо систему диференціально-функціональних рівнянь

$$(\sigma - a)\,\frac{d\xi}{dy} = B(\varepsilon)\xi + F(\xi_y, \varepsilon), \tag{3}$$

де ξ_y — елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $\xi_y(\theta) = \xi(y+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$.

Виконавши в системі (3) заміну $y = (\sigma - a)z$, отримаємо

$$\frac{d\xi}{dz} = B(\varepsilon)\xi + F(\xi_z, \varepsilon), \tag{4}$$

де ξ_z — елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $\xi_z(\theta) = \xi(z+\theta)$, $-\Delta/(\sigma - a) \le \theta \le 0$.

Матрицю $B(\varepsilon)$ можна записати у вигляді $B(\varepsilon) = U(\varepsilon)D(\varepsilon)U^{-1}(\varepsilon)$, де матриця $D(\varepsilon)$ є блочно-діагональною: $D(\varepsilon) = \operatorname{diag}[B_1(\varepsilon), B_2(\varepsilon)]$, $B_1(\varepsilon)$ — діагональна матриця другого порядку з елементами $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ на діагоналі, власні значення матриці $B_2(\varepsilon)$ задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda \le -2\gamma_0 < 0$. Виконавши в системі (4) заміну $\xi = U(\varepsilon)v$, де $v = [\eta, \zeta]^T$, $\eta \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, одержимо систему

$$\frac{d\eta}{dz} = B_1(\varepsilon)\eta + F_1(v_z, \varepsilon), \quad \frac{d\zeta}{dz} = B_2(\varepsilon)\zeta + F_2(v_z, \varepsilon). \tag{5}$$

Тоді згідно з [2] існує інтегральний многовид системи (5), що може бути записаний у вигляді $v_z = S(\eta, \varepsilon)$. Поведінка розв'язків системи (5) на многовиді описується рівнянням

$$\frac{d\chi}{dz} = B_1(\varepsilon)\chi + F_1(S(\chi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

Систему (6) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))w + G_1(w, \bar{w}, \varepsilon), \\ \frac{d\bar{w}}{dz} &= (\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon))\bar{w} + \bar{G}_1(w, \bar{w}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

де $\chi = [w, \bar{w}]^T$. Для кожного розв'язку системи (5) існує розв'язок системи (6) такий, що справджується оцінка [2]

$$\|v_z(t) - S(\chi(t), \varepsilon)\| \le M\exp(-\gamma_0 t), \quad t \ge 0. \tag{8}$$

Перше рівняння системи (7) перетворимо за допомогою підстановки

$$w = p + W_2(p, \bar{p}, \varepsilon) + W_3(p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{9}$$

де W_2 та W_3 — форми відповідно другого та третього порядку. Перетворення (9) можна підібрати так, що рівняння для p набере вигляду [10]

$$\frac{dp}{dz} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))p + (\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon))p^2\bar{p} + P(p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{10}$$

де $P(p, \bar{p}, \varepsilon) = O(|p|^4)$ при $|p| \to 0$. Перейшовши у рівнянні (10) до полярних координат $p = r\exp(i\varphi)$, одержимо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(r, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{dr}{dz} &= \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(r, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{11}$$

де $R(r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$, $\Phi(r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^3)$ при $|r| \to 0$.

Нехай $\gamma(0) < 0$. Аналізуючи систему (11), переконуємося, що рівняння (10) має періодичний розв'язок $p = \rho(\varphi, \varepsilon)\exp(i\varphi)$, де

$$\rho(\varphi, \varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon\alpha'(0)}{-\gamma(0)}} + O(\varepsilon), \quad \varphi = \varphi_0 + z\left[\beta(\varepsilon) - \varepsilon\delta(\varepsilon)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})\right], \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Звідси $\varphi = \varphi_0 + z\left[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\dfrac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})\right]$. Підставивши періодичний розв'язок p рівняння (10) у праву частину рівності (9), отримаємо періодичний розв'язок $w(t, \varepsilon)$ першого рівняння системи (7), звідки знайдемо періодичний розв'язок системи (5), а потім періодичний розв'язок $\xi(z, \varepsilon) = \xi\left(\dfrac{y}{\sigma - a}, \varepsilon\right)$ систем (4) та (3). Функція ξ буде мати період 2π відносно y тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{1}{\sigma - a}\left[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O\left(\varepsilon^{1,5}\right)\right] = k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{12}$$

Розв'язуючи рівняння (12) відносно σ, одержуємо зліченне число значень $\sigma = \sigma_k(\varepsilon)$. Отже, система (1) має зліченне число граничних циклів. Якщо $k > 0$, то $\sigma > a$ при малих ε і з нерівності (8) випливає, що такі цикли будуть експоненціально орбітально стійкими.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2 і для коефіцієнта в рівнянні (10) виконується нерівність* $\gamma(0) < 0$. *Тоді існує зліченне число циклів системи (1) з параметрами* $\sigma = \sigma_k$, *що задовольняють рівняння (12). Значенням параметрів* σ_k, $k > 0$, *відповідають стійкі граничні цикли, для яких* $\sigma_k > a$.

Як приклад розглянемо систему (1), де $u \in \mathbb{R}^2$, $B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $F(u_x, \varepsilon) = -(u_1^2(x - \Delta) + u_2^2(x - \Delta))\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Тоді для знаходження хвильового розв'язку $u = \xi(y)$, $y = \sigma t + x$ задачі (1), (2) одержимо систему вигляду (3). Перейшовши у цій системі до полярних координат $\xi_1 = r\sin\varphi$, $\xi_2 = r\cos\varphi$, отримаємо систему

$$(\sigma - a)\frac{d\varphi}{dy} = 1, \quad (\sigma - a)\frac{dr}{dy} = r(\varepsilon - r^2(y - \Delta)).$$

Отже, періодичний розв'язок системи (3) у цьому випадку має вигляд $\xi_1 = \sqrt{\varepsilon}\sin\varphi$, $\xi_2 = \sqrt{\varepsilon}\cos\varphi$, $\varphi = \varphi_0 + \dfrac{y}{\sigma - a}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Цей розв'язок буде мати період 2π тоді і тільки тоді, коли $\sigma = \sigma_k = a + \dfrac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Періодичні розв'язки будуть експоненціально орбітально стійкими при $k > 0$.

Зауваження 1. При виконанні умов теореми 1 існує також стійкий граничний цикл, що не залежить від змінної x.

2. Біжучі хвилі квазілінійного рівняння Кортевега — де Фріза з перетвореним аргументом. Дослідимо існування періодичних розв'язків крайової задачі

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \varepsilon f(w, w(t, x - \Delta)), \tag{13}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \tag{14}$$

де ε — малий додатний параметр, $a \neq 0$, $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Розв'язок задачі (13), (14) будемо шукати у вигляді хвилі $w = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Підставляючи $w = \theta(y)$ у рівняння (13), одержуємо диференціальне рівняння із аргументом, що запізнюється,

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} + a^2 \frac{d^3\theta}{dy^3} = \varepsilon\, f(\theta, \theta(y - \Delta)), \tag{15}$$

або

$$\frac{d^3\theta}{dy^3} = -\gamma^2 \frac{d\theta}{dy} + \mu\, f(\theta, \theta(y - \Delta)), \tag{16}$$

де $\gamma^2 = \dfrac{\sigma}{a^2}$, $\mu = \dfrac{\varepsilon}{a^2}$. Рівняння (16) запишемо у вигляді системи

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = -\gamma^2\theta_1 + \mu\, f(\theta, \theta(y - \Delta)). \tag{17}$$

Зведемо систему (17) до стандартної форми. Виконуючи заміну $\theta = u_1 + u_2 + \bar{u}_2$, $\theta_1 = i\gamma u_2 - i\gamma\bar{u}_2$, $\theta_2 = -\gamma^2 u_2 - \gamma^2\bar{u}_2$, де u_2 — комплексна змінна, знаходимо

$$u_1' = 2\varepsilon_1 f(u_1 + u_2 + \bar{u}_2, u_1(y - \Delta) + u_2(y - \Delta) + \bar{u}_2(y - \Delta)),$$

$$u_2' = i\gamma u_2 - \varepsilon_1 f(u_1 + u_2 + \bar{u}_2, u_1(y - \Delta) + u_2(y - \Delta) + \bar{u}_2(y - \Delta)), \quad \varepsilon_1 = \frac{\mu}{2\gamma^2}.$$

Виконавши заміну $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 \exp(i\gamma y)$, $\bar{u}_2 = \bar{v}_2 \exp(-i\gamma y)$, одержимо систему

$$\begin{aligned} v_1' &= 2\varepsilon_1 f(v_1 + e^{i\gamma y} v_2 + e^{-i\gamma y}\bar{v}_2, v_1(y - \Delta) + e^{i\gamma(y-\Delta)} v_2(y - \Delta) + e^{-i\gamma(y-\Delta)}\bar{v}_2(y - \Delta)), \\ v_2' &= -\varepsilon_1 e^{-i\gamma y} f(v_1 + e^{i\gamma y} v_2 + e^{-i\gamma y}\bar{v}_2, v_1(y - \Delta) + e^{i\gamma(y-\Delta)} v_2(y - \Delta) + \\ &\quad + e^{-i\gamma(y-\Delta)}\bar{v}_2(y - \Delta)). \end{aligned} \tag{18}$$

Системі (18) поставимо у відповідність усереднену систему [11]

$$v_1' = 2\varepsilon_1 g_1(v_1, v_2\bar{v}_2), \quad v_2' = -\varepsilon_1 v_2 g_2(v_1, v_2\bar{v}_2), \tag{19}$$

де $g_1(v_1, v_2\bar{v}_2) = M[f(v_1 + v_2\exp(i\gamma y) + \bar{v}_2\exp(-i\gamma y), v_1 + v_2\exp(i\gamma(y-\Delta)) + \bar{v}_2\exp(-i\gamma(y-\Delta)))]$, $g_2(v_1, v_2\bar{v}_2) = \dfrac{1}{v_2}M[\exp(-i\gamma y)f(v_1 + v_2\exp(i\gamma y) + \bar{v}_2\exp(-i\gamma y), v_1 + v_2\exp(i\gamma(y-\Delta)) + \bar{v}_2\exp(-i\gamma(y-\Delta)))]$, $M[*]$ — середнє значення відносно y. Перейшовши у (19) до полярних координат $v_2 = r\exp(i\varphi)$, одержимо систему

$$v_1' = 2\varepsilon_1 g_1(v_1, r^2), \quad r' = -\varepsilon_1 r g_2(v_1, r^2). \tag{20}$$

Припустимо, що система $g_1(v_1, s) = 0$, $g_2(v_1, s) = 0$ має розв'язок (v_{10}, s_0), $v_{10} \in \mathbb{R}$, $s_0 > 0$. Нехай матриця A з елементами

$$a_{11} = 2\,\frac{\partial g_1(v_1, r^2)}{\partial v_1}, \quad a_{12} = 2\,\frac{\partial g_1(v_1, r^2)}{\partial r},$$

$$a_{21} = -\frac{\partial[r g_2(v_1, r^2)]}{\partial v_1}, \quad a_{22} = -\frac{\partial[r g_2(v_1, r^2)]}{\partial r}$$

при $v = v_{10}$, $r = \sqrt{s_0}$ задовольняє умови

$$\det A \neq 0, \quad \operatorname{sp} A \neq 0. \tag{21}$$

Тоді система (20) має експоненціально стійкий або експоненціально дихотомічний стан рівноваги $(v_{10}, \sqrt{s_0})$. Стаціонарному розв'язку $(v_{10}, \sqrt{s_0})$ системи (20) відповідає періодичний розв'язок $\theta = v_{10} + 2\sqrt{s_0}\cos\gamma_1(\varepsilon)y + O(\varepsilon)$, $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma + O(\varepsilon)$, рівняння (15). Цей розв'язок буде мати період 2π відносно y тоді і тільки тоді, коли $\gamma = k + O(\varepsilon)$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$, тобто $\sigma = k^2a^2 + O(\varepsilon)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (21). Тоді існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *задача (13), (14) має злічене число періодичних розв'язків*

$$w_k = v_{10} + 2\sqrt{s_0}\cos ky + O(\varepsilon), \quad y = (k^2a^2 + O(\varepsilon))t + x, \quad k = \pm1, \pm2, \ldots.$$

Теорема 3. *Періодичний розв'язок* w_k *задачі (13), (14) буде експоненціально орбітально стійким, якщо виконуються нерівності* $\det A > 0$, $\operatorname{sp} A < 0$.

Теорема 3 випливає з експоненціальної стійкості стаціонарного розв'язку системи (20).

Як приклад розглянемо рівняння (13) з функцією $f(v, w) = \alpha(v - v^3) + \beta(w - w^3)$. Тоді функції g_1 та g_2 у правій частині системи (20) будуть мати вигляд $g_1(v_1, s) = (\alpha+\beta)(v_1 - v_1^3 - 6v_1 s)$, $g_2(v_1, s) = (\alpha + \beta\cos(\gamma\Delta))(1 - 3v_1^2 - 3s)$. Отже, система (20) має стаціонарні розв'язки $(0, 1/\sqrt{3})$ та $(\pm1/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{15})$. Неважко перевірити, що першому з них відповідають стійкі хвилі при $\beta(\cos(k\Delta) - 1) < 0$, $(\alpha+\beta)(\alpha + \beta\cos(k\Delta)) < 0$, а двом іншим — стійкі хвилі при $\beta(\cos(k\Delta) - 1) < 0$, $(\alpha+\beta)(\alpha + \beta\cos(k\Delta)) > 0$.

Зауваження 2. Для рівняння вигляду (13), у якому немає запізнення у правій частині, аналогічні питання розглядалися в [7].

3. Періодичні режими рівняння спінового горіння. Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\xi=2\varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial t}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}\right],\quad \xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x), \tag{22}$$

де ε — малий додатний параметр, Δ — одновимірний оператор Лапласа, $\rho>0$.

Теорема 4. *Біжучі хвилі задачі (22) мають вигляд* $\xi_k(t,x)=\sqrt{1-\frac{k^2}{\rho^2}}\cos(t+kx)+O(\varepsilon)$, *де* $k\in\mathbb{Z}$, $k^2<\rho^2$.

Доведення. Задача (22) еквівалентна системі

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi}{\partial t}=p,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+\xi=2\varepsilon\left[p\left(1-\frac{4}{3}p^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\Delta p\right],\\ \xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x),\quad p(t,x+2\pi)=p(t,x).\end{gathered} \tag{23}$$

Розв'язок системи (23) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi=\theta_1(y)$, $p=\theta_2(y)$, $y=$ $=\sigma t+x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \sigma\frac{d\theta_2}{dy}+\theta_1=2\varepsilon\left[\theta_2\left(1-\frac{4}{3}\theta_2^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\theta_2}{dy^2}\right]. \tag{24}$$

Позначимо через λ_1, λ_2, λ_3 корені характеристичного рівняння

$$\sigma^2\lambda^2+1=2\varepsilon\left[\sigma\lambda+\frac{\sigma}{\rho^2}\lambda^3\right]$$

лінеаризованої системи, причому корінь λ_3 є дійсним, а корені λ_1, λ_2 — комплексно-спряженими. Ці корені характеристичного рівняння можна зобразити у вигляді

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{i}{\sigma}+\frac{\varepsilon}{\sigma}-\frac{\varepsilon}{\sigma^3\rho^2}+O(\varepsilon^2),\quad \lambda_3=\frac{\sigma\rho^2}{2\varepsilon}+\frac{2\varepsilon}{\sigma^3\rho^2}-\frac{2\varepsilon}{\sigma}+O(\varepsilon^2).$$

Заміною $\theta_3=\theta_2'$ система (24) зводиться до системи трьох диференціальних рівнянь, яку в свою чергу лінійною заміною можна звести до вигляду

$$\begin{aligned}{u_1}'&=\lambda_1u_1+\alpha(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3)^3,\\ {u_2}'&=\lambda_2u_2+\beta(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3)^3,\\ {u_3}'&=\lambda_3u_3+\gamma(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3)^3,\end{aligned} \tag{25}$$

де $\theta_1=u_1+u_2+u_3$, $u_2=\bar{u}_1$,

$$\alpha=\frac{4\rho^2\sigma^2}{3(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)},\quad \beta=\frac{4\rho^2\sigma^2}{3(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)},\quad \gamma=\frac{4\rho^2\sigma^2}{3(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}.$$

Зауважимо, що лінійна частина системи (25) має діагональний вигляд.

При малих ε та $|u_1| \leq K$, $K > 2$, існує інтегральний многовид системи (25), який можна зобразити у вигляді $u_3 = g(\varepsilon, u_1, u_2)$, де $u_2 = \bar{u}_1$, причому $g(\varepsilon, u_1, u_2) = O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \to 0$. Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\begin{aligned} {u_1}' &= \lambda_1 u_1 + \alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^3 + O(\varepsilon^3), \\ {u_2}' &= \lambda_2 u_2 + \beta(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^3 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{26}$$

Оскільки $\alpha = O(\varepsilon)$, $\beta = O(\varepsilon)$, то заміною $u_1 = v_1 \exp\left(\frac{iy}{\sigma}\right)$, $u_2 = v_2 \exp\left(-\frac{iy}{\sigma}\right)$ систему (26) зведемо до стандартної форми і застосуємо усереднення відносно y [10]. В результаті одержимо періодичний розв'язок

$$u_1 = r_0 \exp\left(\frac{iy}{\sigma}\right) + O(\varepsilon), \quad u_2 = r_0 \exp\left(-\frac{iy}{\sigma}\right) + O(\varepsilon), \quad 2r_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2\sigma^2}},$$

системи (26). Тут $v_1 = v_2 = r_0$ — стаціонарний розв'язок усередненої системи. Звідси знаходимо

$$\theta_1 = u_1 + u_2 + O(\varepsilon^3) = r_0 \exp\left(\frac{iy}{\sigma}\right) + r_0 \exp\left(-\frac{iy}{\sigma}\right) + O(\varepsilon) = 2r_0 \cos\frac{y}{\sigma} + O(\varepsilon).$$

Враховуючи, що функція θ_1 повинна мати період 2π, одержуємо $\sigma = \frac{1}{k} + O(\varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, $\theta_1 = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\rho^2}} \cos(ky) + O(\varepsilon)$. Тому біжучі хвилі задачі (22) мають вигляд

$$\xi_k(t, x) = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\rho^2}} \cos(t + kx) + O(\varepsilon), \quad \text{де} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k^2 < \rho^2.$$

Теорему доведено.

Зауваження 3. Аналогічно [8] можна показати, що біжучі хвилі $\xi_k(t, x)$ задачі (22) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $k^2 < \frac{1}{6}(2\rho^2 + 1)$.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
2. *Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1982. — **34**, № 3. — С. 334–340.
3. *Клевчук И. И., Фодчук В. И.* Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**, № 3. — С. 324–330.
4. *Клевчук І. І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 563–567.
5. *Клевчук И. И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 10. — С. 1342–1351.
6. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа періодичних розв'язків у системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2001. — Вип. 5. — С. 67–72.

7. *Колесов А. Ю.* Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. мат. — 1995. — **59**, № 3. — С. 141 – 158.

8. *Белан Е. П., Самойленко А. М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 1. — С. 21 – 43.

9. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 502 с.

11. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. — 1966. — **2**, № 1. — P. 57 – 73.

Одержано 14.04.14,
після доопрацювання — 16.09.14