УДК 517.9

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

О. П. Страх

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 4е

We find necessary and sufficient conditions for solvability of a Fredholm boundary-value problem for an integro-dynamic system on a time scale. The structure of solutions of such a problem has been studied.

Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости нетеровых краевых задач для интегро-динамических систем на временной шкале. Исследована структура множества решений таких задач.

Розглянемо інтегро-динамічну систему

$$x^{\Delta}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)x^{\Delta}(s)\right] \Delta s = f(t), \tag{1}$$

де $\Phi(t)$ — $(n \times m)$-вимірна, $f(t)$ — $(n \times 1)$-вимірна, $A(t)$, $B(t)$ — $(m \times n)$-вимірні матриці, елементи яких належать простору $L_2([a,b]_{\mathbb{T}})$, $\operatorname{rank}\Phi(t) = m$, $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $x(t) \in D_2^n([a,b]_{\mathbb{T}})$, $x^{\Delta}(t) \in L_2([a,b]_{\mathbb{T}})$, $L_2([a,b]_{\mathbb{T}}) = \left\{ f(t) \left| \int_a^b |f(t)|^2 \, \Delta t < \infty \right.\right\}$ — банаховий простір Δ-інтегровних із квадратом функцій [1] на $[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T}$ з нормою

$$\|f\| = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}},$$

$D_2^n([a,b]_{\mathbb{T}})$ — простір n-вимірних абсолютно неперервних на $[a,b]_{\mathbb{T}}$ функцій [2], $\mathbb{T}$ — часова шкала.

Окремі питання щодо інтегральних та інтегро-динамічних систем на часовій шкалі досліджувались у роботах [3, 4].

1. Знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності системи (1). Запишемо

$$x^{\Delta}(t) = f(t) + \Phi(t)c_0,$$

$$c_0 = \Phi(t) \int\limits_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)x^\Delta(s)\right] \Delta s \in \mathbb{R}^m,$$

тоді з урахуванням властивостей Δ-інтегрування [5] отримаємо

$$x = \tilde{f}(t) + \Psi(t)c_0 + \tilde{c} = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)c, \tag{2}$$

де $\tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)\Delta s$, $\Psi(t) = \int_a^t \Phi(s)\Delta s$, $\tilde{c} = \mathrm{col}\,(c_{m+1}, \ldots, c_{m+n}) \in \mathbb{R}^n$, $\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$ — $(n \times (m+n))$-вимірна матриця, $c = \mathrm{col}\,(c_0, \tilde{c}) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Підставляючи (2) в систему (1), одержуємо

$$f(t) + [\Phi(t), 0_n]c - \Phi(t) \int\limits_a^b A(s)\tilde{f}(s)\Delta s - \Phi(t) \int\limits_a^b A(s)[\Psi(s), I_n]\Delta s \cdot c -$$

$$- \Phi(t) \int\limits_a^b B(s)f(s)\Delta s - \Phi(t) \int\limits_a^b B(s)[\Phi(s), 0_n]\Delta s \cdot c = f(t),$$

$$\left[I_m - \int\limits_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\Delta s, - \int\limits_a^b A(s)\Delta s\right] c = \int\limits_a^b [A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)]\Delta s.$$

Таким чином, отримали алгебраїчну систему для визначення вектора c:

$$Dc = \tilde{b}, \tag{3}$$

де $D = \left[I_m - \int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\Delta s, - \int_a^b A(s)\,\Delta s\right]$ — $(m \times (m+n))$-вимірна матриця, $\tilde{b} = \int_a^b [A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)]\Delta s$ — $(m \times (m+1))$-вимірна матриця.

Згідно з теорією псевдообернених матриць Мура – Пенроуза [6, 7], алгебраїчна система (3) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли її права частина належить ортогональному доповненню $(\ker D^*)^\perp = \mathrm{Im}\,(D)$. Це означає, що для вектора-константи $\tilde{b}$ повинна виконуватись умова

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \tag{4}$$

де $P_{D^*_{d_1}}$ — $(d_1 \times n)$-вимірна матриця, що складається з $d_1 := m - n_1$ лінійно незалежних рядків $(m \times m)$-вимірної матриці $P_{D^*} := I_m - DD^+$, що є ортопроектором $P_{D^*} \colon \mathbb{R}^m \to N(D^*)$, $n_1 := \mathrm{rank}\, D$, D^+ — єдина $((m+n) \times m)$-вимірна псевдообернена за Муром – Пенроузом до D матриця, а D^* — транспонована до D матриця. При виконанні d_1 лінійно незалежних умов (4) система (3) має r_1-параметричну ($r_1 = m + n - n_1$) сім'ю розв'язків вигляду

$$c = P_{D_{r_1}} c_{r_1} + D^+\tilde{b}, \quad c_{r_1} \in \mathbb{R}^{r_1}, \tag{5}$$

де $P_{D_{r_1}}$ — $((m+n)\times r_1)$-вимірна матриця, що складається з r_1 лінійно незалежних стовпців $((m+n)\times(m+n))$-вимірної матриці $P_D := I_{m+n} - D^+D$, що є ортопроектором $P_D : \mathbb{R}^{m+n} \to N(D)$.

Підставляючи отриманий вираз для константи $c \in \mathbb{R}^{m+n}$ у розв'язок (2), отримуємо загальний розв'язок інтегро-динамічної системи (1). Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1$. *Відповідна однорідна інтегро-динамічна система для системи (1)* $(f = 0)$ *має* r_1*-параметричну* $(r_1 = m + n - n_1)$ *сім'ю розв'язків*

$$x(t, c_{r_1}) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} c_{r_1}, \quad c_{r_1} \in \mathbb{R}^{r_1}.$$

Неоднорідна інтегро-динамічна система (1) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли функція $f(t) \in L_2([a,b]_{\mathbb{T}})$ *задовольняє* $d_1 = m - n_1$ *лінійно незалежних умов (4). При виконанні цих умов система (1) має* r_1*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t, c_{r_1}) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} c_{r_1} + F(t), \quad x(t) \in D_2^n([a,b]_{\mathbb{T}}), \quad x^{\Delta}(t) \in L_2([a,b]_{\mathbb{T}}), \tag{6}$$

де $F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}$.

У випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ система (1) набере вигляду

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\right] ds = f(t),$$

тобто буде системою лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, справедливість теореми 1 для якої встановлено в роботі [8]. Ці системи досліджувалися також у роботах [9–11].

У випадку $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ система (1) буде системою лінійних „сумовно-різницевих рівнянь" [12] вигляду

$$\Delta x(t) - \Phi(t) \sum_{s=a}^{b-1} \left[A(s)x(s) + B(s)\Delta x(s)\right] = f(t), \quad \Delta x(t) = x(t+1) - x(t), \quad a, b, t \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 1. Розглянемо сумовно-різницеву систему

$$\Delta x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \sum_{s=2}^{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} x(s) + \begin{pmatrix} 3 & (1-s) \end{pmatrix} \Delta x(s)\right] = f(t), \tag{7}$$

тобто $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 3 & (1-t) \end{pmatrix}$ $\forall t \in [2;5]_{\mathbb{Z}}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$.
Знайдемо $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \sum_{s=2}^{t-1} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ \dfrac{1}{2}(t^2 - t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислюючи відповідні суми від 2 до 4, знаходимо (1×3)-вимірну матрицю D та єдину псевдообернену для неї матрицю D^+:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{20} \\ 0 \\ -\dfrac{3}{20} \end{pmatrix},$$

а також відповідні матриці-проектори $P_{D_{r_1}}$, $r_1 = 2$, і $P_{D^*_{d_1}}$, $d_1 = 0$:

$$P_D = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{D_{r_1}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 10 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{D^*} = P_{D^*_{d_1}} = 0.$$

Таким чином, при довільному $f(t) \in L_2([a,b]_{\mathbb{T}})$ умова розв'язності (4) для сумовно-різницевої системи (7) виконується і за теоремою 1 дана система має двопараметричну сім'ю розв'язків вигляду (6), після підстановки відповідних значень в яку отримуємо

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1(t-2) + c_2 \\ \dfrac{1}{2}\,c_1(t^2 - t) - \dfrac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\,t - 1 \\ \dfrac{1}{4}\,t^2 - \dfrac{1}{4}\,t + 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{b} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

де $\tilde{f}_{1,2}(t) = \sum_{s=2}^{t-1} f_{1,2}(s)$, $\tilde{b} = \sum_{s=2}^{4}\left[A(s)\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(s) \\ \tilde{f}_2(s) \end{pmatrix} + B(s)\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix}\right]$.

2. Розглянемо питання про розв'язність та структуру множини розв'язків крайової задачі, що складається з інтегро-динамічної системи (1) та крайових умов

$$x^{\Delta}(t) - \Phi(t)\int_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)x^{\Delta}(s)\right]\Delta s = f(t), \quad \ell x = \alpha, \tag{8}$$

де ℓ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $D_2^n([a,b]_{\mathbb{T}})$, $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Нехай умова розв'язності (4) для системи (1) виконується, тобто $P_{D^*_{d_1}}\tilde{b} = 0$. Тоді для того щоб розв'язок (6) системи (1) був розв'язком крайової задачі (8), необхідно, щоб він задовольняв крайові умови $\ell x = \alpha$. Підставляючи розв'язок (6) у задані крайові умови

$$\ell x \equiv \ell(F(\cdot)) + \ell(\Psi_0(\cdot)P_{D_{r_1}}c_{r_1}) = \alpha, \tag{9}$$

отримуємо алгебраїчну систему для визначення вектора c_{r_1}:

$$Qc_{r_1} = \alpha - \ell(F(\cdot)), \tag{10}$$

де $Q = \ell(\Psi_0(\cdot))P_{D_{r_1}}$ — $(p \times r_1)$-вимірна матриця.

На підставі результатів із [7] алгебраїчна система (10) є розв'язною, якщо її права частина $\alpha - \ell(F(\cdot))$ належить ортогональному доповненню $(\ker Q^*)^{\perp} = \operatorname{Im}(Q)$. Це означає, що повинна виконуватись умова

$$P_{Q_d^*}(\alpha - \ell(F(\cdot))) = 0, \tag{11}$$

де $P_{Q_d^*}$ — $(d \times p)$-вимірна матриця, що складається з $d = p - m_1$ лінійно незалежних рядків $(p \times p)$-вимірної матриці $P_{Q^*} := I_p - QQ^+$, що є ортопроектором $P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \to N(Q^*)$, $m_1 := \operatorname{rank} Q$, Q^+ — єдина $(r_1 \times p)$-вимірна псевдообернена за Муром – Пенроузом до Q матриця, а Q^* — транспонована до Q матриця. При виконанні d лінійно незалежних умов (11) система (10) має r-параметричну ($r = m + n - n_1 - m_1$) сім'ю розв'язків вигляду

$$c_{r_1} = P_{Q_r} c_r + Q^+(\alpha - \ell(F(\cdot))), \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{12}$$

де P_{Q_r} — $(r_1 \times r)$-вимірна матриця, що складається з r лінійно незалежних стовпців $(r_1 \times \times r_1)$-вимірної матриці $P_Q := I_{r_1} - Q^+Q$, що є ортопроектором $P_Q : \mathbb{R}^{r_1} \to N(Q)$. Підставляючи вираз (12) для константи c_{r_1} у розв'язок (6) системи (1), отримуємо загальний розв'язок крайової задачі (8). Таким чином, справджується наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай для крайової задачі (8)* $\operatorname{rank} Q = m_1 \leq \{p, r_1\}$. *Тоді відповідна однорідна крайова задача* ($f = 0, \alpha = 0$) *має* $r = r_1 - m_1$ *і тільки* r *лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Неоднорідна крайова задача (8) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли $\alpha \in \mathbb{R}^p$ *та* $f(t) \in \in L_2([a, b]_{\mathbb{T}})$ *задовольняють* d_1 *лінійно незалежних умов (4) та* d *лінійно незалежних умов (11). При виконанні цих умов крайова задача (8) має* r*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\alpha - \ell(F(\cdot))) + F(t).$$

Приклад 2. Розглянемо крайову задачу

$$x^{\Delta}(t) - \Phi(t) \int_{-2}^{2} \left[A(s)x(s) + B(s)x^{\Delta}(s)\right] \Delta s = f(t), \tag{13}$$

$$\ell x = x(0) - x(1) = \alpha \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

де $[-2; 2]_{\mathbb{T}} := [-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2]$, $\Phi(t) = e^{-t}$, $A(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{якщо} \quad t \in [-2; -1], \\ -e, & \text{якщо} \quad t = 0, \\ -e^{t}, & \text{якщо} \quad t \in [1; 2], \end{cases}$

$B(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^2, & \text{якщо} \quad t \in [-2; -1], \\ \dfrac{3}{2} e^2 - e, & \text{якщо} \quad t = 0, \\ e^2, & \text{якщо} \quad t \in [1; 2], \end{cases}$ $\forall t \in [-2; 2]_{\mathbb{T}}$. Спочатку розглянемо питання про розв'язність інтегро-динамічного рівняння (13). Знайдемо $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \int_{-2}^{t} \Phi(s)\,\Delta s = \begin{cases} e^2 - e^{-t}, & \text{якщо} \quad t \in [-2;-1], \\ e^2, & \text{якщо} \quad t = 0, \\ e^2 + 1 + e^{-1} - e^{-t}, & \text{якщо} \quad t \in [1;2]. \end{cases}$$

Провівши відповідні розрахунки, знайдемо (1×2)-вимірну матрицю D та єдину псевдообернену до неї матрицю D^+:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а також відповідні матриці-проектори P_D і P_{D^*}:

$$P_D = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{D^*} = I_1 = 1.$$

Тоді умова розв'язності (4) набере вигляду $\tilde{b} = \int_{-2}^{2} \Big[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\Big]\Delta s = 0$. Покладемо, наприклад, $f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & \text{якщо} \quad t \in [-2;-1], \\ \frac{1}{2}(e^4 + e^2), & \text{якщо} \quad t = 0, \\ -e^{2t}, & \text{якщо} \quad t = \in [1;2]. \end{cases}$ Тоді $\tilde{b} = 0$ і умова розв'язності (4) для даного рівняння (13) виконується. Це означає, що за теоремою 1 для вищевказаного значення $f(t)$ інтегро-динамічне рівняння (13) має двопараметричну ($r_1 = 2$) сім'ю розв'язків вигляду

$$x(t) = \begin{cases} (e^2 + e^{-t})c_1 + c_2 + \dfrac{1}{2}\,e^4 - \dfrac{1}{2}\,e^{-2t}, & t \in [-2;-1], \\[2ex] e^2 c_1 + c_2 + \dfrac{1}{2}\,e^4 + \dfrac{1}{2}\,e^2, & t = 0, \\[2ex] (e^2 + 1 + e^{-1} - e^{-t})c_1 + c_2 + e^4 + \dfrac{3}{2}\,e^2 - \dfrac{1}{2}\,e^{2t}, & t \in [1;2], \end{cases} \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

З'ясуємо питання про розв'язність крайової задачі (13), (14). Знайдемо матрицю $Q = \ell(\Psi_0(\cdot))P_{D_{r_1}}$. $\ell(\Psi_0(\cdot))P_{D_{r_1}} = \ell(\Psi_0(\cdot)) = \Psi_0(0) - \Psi_0(1)$, тобто $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ і $Q^+ = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Звідси отримуємо $P_{Q^*} = 0$, а $P_{Q_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отже, за теоремою 2 для вибраного значення $f(t)$ і для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ крайова задача (13), (14) є розв'язною і має однопараметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$x(t,c) = \begin{cases} c + \alpha + e^4 - \dfrac{3}{2}e^2 - \dfrac{1}{2}\,e^{-2t}, & t \in [-2;-1], \\[2ex] c + \alpha + e^4 - e^2, & t = 0, \\[2ex] c + \alpha + \dfrac{3}{2}\,e^4 - \dfrac{1}{2}\,e^{2t}, & t \in [1;2], \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

1. *Ruffing A., Simon M.* Corresponding Banach spaces on time scales // J. Comput. and Appl. Math. — 2005. — № 179. — P. 313–326.
2. *Cabada A., Vivero D. R.* Criterions for absolute continuity on time scales // J. Difference Equat. and Appl. — 2005. — **11**, № 11. — P. 1013–1028.
3. *Pachpatte D. B.* Fredholm type integrodifferential equation on time scales // Electron. J. Different. Equat. — 2010. — № 140. — P. 1–10.
4. *Sikorska-Nowak A.* Integrodifferential equations on time scales with Henstock–Kurzweil–Pettis delta integrals // Hindawi Publ. Corporation, Abstract and Appl. Anal. — 2010. — ID 836347. — 17 p.
5. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Boston, MA: Birkhäuser, 2001.
6. *Ben-Israel A., Greville T. N. E.* Generalized inverses. — Second ed. // CMS Books Math. — New York: Springer-Verlag, 2003.
7. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.
8. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576–1579.
9. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 151–164.
10. *Golovatska I.* Weakly perturbed boundaty-value problems of integro-differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. — 2013. — № 54. — P. 1–71.
11. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 314–321.
12. *Pachpatte B. G.* Error evaluation of approximate solutions for sum-difference equations in two variables // Electron. J. Different. Equat. — 2009. — № 104. — P. 1–8.

Одержано 14.10.13