УДК 532.5+517.98

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ТОНКИХ СЛОЕВ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

И. А. Гажева

Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского
Украина, 95000, Симферополь, просп. Вернадского, 4
e-mail: param256@gmail.com

We consider small motions in a thin-layered system in a rotating ideal fluid, as well as the eigen oscillation problem that naturally appears in a study of an initial boundary-value problem in the case where no rotation is present and all physical quantities are set to one.

The equations and the initial boundary-value conditions are considered with the so-called shallow water assumption, that is, if the transversal dimension of the layers is much less than the lonngitudinal dimensions, and the motion of the fluid occurs in the horizontal direction.

We study the main operator of a simplified problem. This operator appears when dealing with the problem of small motions of a thin-layered system in a rotating ideal fluid.

Розглядається задача малих рухів системи тонких шарів обертової ідеальної рідини, а також задача власних коливань системи, що природним чином виникає після дослідження початково-крайової задачі у випадку, коли обертання системи відсутнє і всі фізичні коефіцієнти є одиничними.

Рівняння і крайові умови відповідної початково-крайової задачі розглядаються у так званому наближенні мілкої води, коли поперечні розміри шарів набагато менші, ніж їх поздовжній розмір, а рух рідини в основному відбувається у горизонтальному напрямку.

Мета роботи полягає в дослідженні основного оператора спрощеної задачі, що виникає при вивченні задачі малих рухів системи тонких шарів обертової ідеальної рідини.

1. Постановка задачи. Будем считать, что гидросистема, состоящая из m тонких несмешивающихся слоев идеальной жидкости различной плотности ρ_j, $0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m$, и толщины h_j, заполняет цилиндрическую область (сосуд) $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и в невозмущенном состоянии равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega_0 = f/2$, где величину f называют параметром Кориолиса. Полагаем, что ω_0 достаточно мала, и тогда свободную поверхность Γ_1 верхней жидкости, а также границы раздела $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ между слоями и днищем Γ_{m+1} можно считать плоскими и горизонтальными. При этом $\Omega = \Gamma \times (-h, 0)$, где Γ — поперечное сечение цилиндра, а $h = \sum_{k=1}^{m} h_k$ — высота системы слоев жидкости. Поскольку по предположению h много меньше диаметра Γ, движения данной системы тонких слоев жидкостей можно описывать дифференциальными уравнениями теории мелкой воды, или теорией длинных волн (см. [1]).

Соответствующая проблема для одного тонкого слоя жидкости исследована в [2, 3].

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси Ox_3, и приведем математическую постановку исследуемой задачи. В теории длинных волн предполагается, что горизонтальные компоненты скорости и возмущение поля давлений зависят лишь от горизонтальных координат $x = (x_1, x_2) \in \Gamma$ и времени t. Тогда вместо трехмерной возникает двумерная задача о нахождении горизонтальных полей скоростей $\vec{u_j} = \vec{u_j}(t,x)$, полей давлений $p_j(t,x)$, а также вертикальных отклонений $\zeta_j = \zeta_j(t,x)$ движущихся границ раздела между слоями от их равновесных положений Γ_j, $j = \overline{1,m}$, $x \in \Gamma$.

В этих предположениях уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости в системе координат Ox_1x_2, жестко связанной с сосудом и вращающейся вместе с ним с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega_0} = \omega_0\vec{e_3}$, таковы (см. [4, с. 322]):

$$\rho_j \frac{\partial \vec{u_j}}{\partial t} - 2\omega_0\rho_j(\vec{u_j} \times \vec{e_3}) + \nabla p_j = \vec{0}, \quad x \in \Gamma, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.1}$$

где ∇ — двумерный градиент в плоскости Ox_1x_2.

Приведем теперь краткий вывод других уравнений, а также краевые и начальные условия изучаемой задачи. В исходной трехмерной постановке задачи кинематические условия на поверхностях $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ формулируются следующим образом:

$$\begin{gathered} w_1 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \ (x_3 = 0), \quad w_1 = w_2 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \ (x_3 = -h_1), \ldots, \\ w_{m-1} = w_m = \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} \ \left(x_3 = -\sum_{k=1}^{m-1} h_k\right), \quad w_m = 0 \ (x_3 = -h), \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $h_j > 0$ — постоянные толщины слоев в невозмущенном состоянии системы, w_j — поля вертикальных скоростей слоев на Γ_j, $j = \overline{1,m}$.

Соответственно, динамические условия имеют вид

$$\begin{gathered} p_1 = g\rho_1\zeta_1 \ \ (\Gamma_1), \quad p_1 - p_2 = g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_2 \text{ (на } \Gamma_2), \ldots, \\ p_{m-1} - p_m = g(\rho_{m-1} - \rho_m)\zeta_m \ \text{ (на } \Gamma_m). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Опираясь на соотношения (1.2) и (1.3), устанавливаем следствия из уравнений неразрывности для каждого слоя жидкости. Из этих уравнений следует, что $\partial w_j/\partial x_3$ являются функциями горизонтальных координат $x = (x_1, x_2) \in \Gamma$ и времени t. Поэтому $w_j(t, x, x_3)$ являются линейными функциями вертикальной координаты x_3, и их можно вычислить, зная их значения на Γ_j, $j = \overline{1, m+1}$. Это приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\,(h_1\vec{u}_1) + \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\,(h_2\vec{u}_2) + \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} = 0, \ldots, \\ \operatorname{div}\,(h_{m-1}\vec{u}_{m-1}) + \frac{\partial \zeta_{m-1}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\,(h_m\vec{u}_m) + \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Поскольку ∇p_j не зависят от x_3, то из динамических условий (1.3) находим

$$\begin{gathered} \nabla p_1 = g\rho_1\nabla\zeta_1, \quad \nabla p_2 = g\rho_1\nabla\zeta_1 + g(\rho_2 - \rho_1)\nabla\zeta_2, \ldots, \\ \nabla p_m = g\rho_1\nabla\zeta_1 + g(\rho_2 - \rho_1)\nabla\zeta_2 + \ldots + g(\rho_m - \rho_{m-1})\nabla\zeta_m. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Подставляя эти соотношения в (1.1) и записывая (1.4) в равносильной форме, получаем систему уравнений движения

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \frac{\partial \vec{u_1}}{\partial t} - 2\omega_0\rho_1(\vec{u_1} \times \vec{e_3}) + \rho_1 g \nabla\zeta_1 = \vec{0}, \\
&\rho_2 \frac{\partial \vec{u_2}}{\partial t} - 2\omega_0\rho_2(\vec{u_2} \times \vec{e_3}) + g\,(\rho_1\nabla\zeta_1 + (\rho_2 - \rho_1)\nabla\zeta_2) = \vec{0}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\rho_m \frac{\partial \vec{u_m}}{\partial t} - 2\omega_0\rho_m(\vec{u_m} \times \vec{e_3}) + g\,(\rho_1\nabla\zeta_1 + (\rho_2 - \rho_1)\nabla\zeta_2 + \ldots + (\rho_m - \rho_{m-1})\nabla\zeta_m) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

а также преобразованных уравнений неразрывности

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h_1\vec{u_1}) + \ldots + \mathrm{div}\,(h_m\vec{u_m}) = 0, \\
&\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h_2\vec{u_2}) + \ldots + \mathrm{div}\,(h_m\vec{u_m}) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial \zeta_{m-1}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h_{m-1}\vec{u_{m-1}}) + \mathrm{div}\,(h_m\vec{u_m}) = 0, \quad \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h_m\vec{u_m}) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

К этой системе следует добавить также условия сохранения объема каждой жидкости

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta_j d\Gamma = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.8}$$

условие непротекания на боковой поверхности цилиндра

$$u_{j,n} := \vec{u}_j \cdot \vec{n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Gamma), \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.9}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Gamma$ в плоскости Γ, а также начальные условия

$$\vec{u}_j(0,x) = \vec{u}_j^0(x), \quad \zeta_j(0,x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.10}$$

Таким образом, имеем начально-краевую задачу о решении систем уравнений (1.6), (1.7) при условиях (1.8), (1.9) и начальных условиях (1.10).

Будем считать, что задача (1.6) – (1.10) имеет классическое решение, т. е. такие функции $\vec{u}_j(t,x)$, ζ_j, $j = \overline{1,m}$, которые имеют непрерывные производные, входящие в (1.6) – (1.10), причем для этих функций выполнены данные соотношения. Тогда для указанного решения выполнено тождество

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\rho_k\int\limits_{\Gamma} h_k|\vec{u}_k|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\,g\sum_{k=1}^{m}(\rho_k-\rho_{k-1})\int\limits_{\Gamma}|\zeta_k|^2 d\Gamma \equiv \mathrm{const} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\rho_k\int\limits_{\Gamma} h_k|\vec{u}_k^0|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}g\sum_{k=1}^{m}(\rho_k-\rho_{k-1})\int\limits_{\Gamma}|\zeta_k^0|^2 d\Gamma \ \ (\rho_0 := 0). \qquad (1.11)$$

В каждой части этого соотношения первое слагаемое равно кинетической энергии системы, а второе — потенциальной энергии. Таким образом, (1.11) показывает, что полная энергия гидросистемы сохраняется в процессе ее движения.

2. Приведение исходной задачи к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Будем исследовать задачу (1.6) – (1.10) методами функционального анализа, в частности методами теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и теории самосопряженных операторов.

В векторно-матричной форме задача примет вид

$$\begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} - 2\omega_0\begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & F_{12} \\ F_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{u}(0) \\ \zeta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

$$\vec{u} := (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m)^{\tau}, \zeta := (\zeta_1,\ldots,\zeta_m)^{\tau}, \vec{u}^0 := \left(\vec{u}_1^0,\ldots,\vec{u}_m^0\right)^{\tau}, \zeta := \left(\zeta_1^0,\ldots,\zeta_m^0\right)^{\tau}, \qquad (2.2)$$

$$E_{11} := \mathrm{diag}\left(\rho_k\vec{I}\right)_{k=1}^{m}, \quad E_{22} = \mathrm{diag}\,(I_k)_{k=1}^{m}, I_k := I,$$
$$K_{11} := \mathrm{diag}\,(\rho_k(\ldots\times\vec{e}_3))_{k=1}^{m}, \qquad (2.3)$$

F_{12} и F_{21} — нижне- и верхнетреугольные матрицы:

$$F_{12} := \begin{pmatrix} g\rho_1\nabla & 0 & \ldots & 0 \\ g\rho_1\nabla & g(\rho_2-\rho_1)\nabla & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g\rho_1\nabla & g(\rho_2-\rho_1)\nabla & \ldots & g(\rho_m-\rho_{m-1})\nabla \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$F_{21} := \begin{pmatrix} \mathrm{div}\,(h_1\ldots) & \mathrm{div}\,(h_2\ldots) & \ldots & \mathrm{div}\,(h_m\ldots) \\ 0 & \mathrm{div}\,(h_2\ldots) & \ldots & \mathrm{div}\,(h_m\ldots) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{div}\,(h_m\ldots) \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Здесь символом $(\ldots;\ldots;\ldots;\ldots)^{\tau}$ обозначена операция транспонирования (в данном случае вектор-строки).

С целью перехода к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения с операторными коэффициентами, имеющими свойства самосопряженности в некотором гильбертовом пространстве, выполним в (2.1) – (2.5) замены

$$\vec{u_1} = g^{1/2}h_1^{-1/2}\vec{v_1},\ \vec{u_2} = g^{1/2}h_2^{-1/2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/2}\vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{u_m} = g^{1/2}h_m^{-1/2}\left(\frac{\rho_{m-1}}{\rho_m}\right)^{1/2}\vec{v_m},$$
$$\zeta_1 = \eta_1,\ \zeta_2 = \rho_1^{1/2}(\rho_2-\rho_1)^{-1/2}\eta_2,\ \ldots,\ \zeta_m = \rho_1^{1/2}(\rho_m-\rho_{m-1})^{-1/2}\eta_m. \tag{2.6}$$

Тогда вместо (2.1) – (2.5) получим задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \eta\end{pmatrix} - 2\omega_0\begin{pmatrix}G_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \eta\end{pmatrix} + g^{1/2}\begin{pmatrix}0 & M_{12}\\ M_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{0}, \tag{2.7}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}^0, \quad \eta(0) = \eta^0, \tag{2.8}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} h_1^{1/2}\nabla & 0 & \ldots & 0\\ h_2^{1/2}(\rho_1-\rho_0)^{1/2}\rho_2^{-1/2}\nabla & h_2^{1/2}(\rho_2-\rho_1)^{1/2}\rho_2^{-1/2}\nabla & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ h_m^{1/2}(\rho_1-\rho_0)^{1/2}\rho_m^{-1/2}\nabla & h_m^{1/2}(\rho_2-\rho_1)^{1/2}\rho_m^{-1/2}\nabla & \ldots & h_m^{1/2}(\rho_m-\rho_{m-1})^{1/2}\rho_m^{-1/2}\nabla \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} h_1^{1/2}\mathrm{div} & h_2^{1/2}(\rho_1-\rho_0)^{1/2}\rho_2^{-1/2}\mathrm{div} & \ldots & h_m^{1/2}(\rho_1-\rho_0)^{1/2}\rho_m^{-1/2}\mathrm{div}\\ 0 & h_2^{1/2}(\rho_2-\rho_1)^{1/2}\rho_2^{-1/2}\mathrm{div} & \ldots & h_m^{1/2}(\rho_2-\rho_1)^{1/2}\rho_m^{-1/2}\mathrm{div}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & h_m^{1/2}(\rho_m-\rho_{m-1})^{1/2}\rho_m^{-1/2}\mathrm{div} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$G_{11} = \mathrm{diag}\left((\ldots)\times\vec{e_3}\right)_{k=1}^{m}. \tag{2.11}$$

Введем теперь необходимые для дальнейшего гильбертовы пространства скалярных и векторных полей. Пусть $L_2(\Gamma)$ — гильбертово пространство комплекснозначных скалярных функций $\zeta(x)$, $x\in\Gamma$, с квадратом нормы

$$(\eta,\eta)_0 = \|\eta\|_0^2 := \int_{\Gamma}|\eta|^2 d\Gamma, \tag{2.12}$$

обеспечивающим конечность потенциальной энергии гидросистемы (см. (1.11)), и соответствующим скалярным произведением. Тогда в силу условий (1.8) приходим к выводу, что в задаче (2.7) – (2.11) должны выполняться условия

$$(\eta_k, 1_\Gamma)_0 = \int\limits_\Gamma \eta_k d\Gamma = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

где 1_Γ — функция, заданная на Γ, т. е. искомые функции $\eta_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, должны принадлежать подпространству

$$L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}.$$

Введем далее пространство $\vec{L_2}(\Gamma)$ комплекснозначных векторных полей $\vec{v}(x)$, $x \in \Gamma$, с квадратом нормы, обеспечивающим конечность кинетической энергии гидросистемы (снова см. (1.11))

$$\|\vec{v}\|^2 := \int\limits_\Gamma |\vec{v}|^2 d\Gamma,$$

и соответствующим скалярным произведением.

Лемма 2.1. *Оператор G_{11} из (2.11) является ограниченным кососамосопряженным оператором, действующим в пространстве $\vec{L}_2 := \left(\vec{L}_2(\Gamma)\right)^m$:*

$$G_{11}^* = -G_{11}, \quad \|G_{11}\| = 1.$$

Для уточнения взаимосвязей между операторными матрицами M_{12} и M_{21} из (2.9), (2.10) введем в рассмотрение ортогональное разложение гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Gamma)$ (см., например, [5, с. 38]):

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma), \tag{2.13}$$

$$\vec{J}_0(\Gamma) := \left\{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \operatorname{div}\vec{u} = 0, u_n = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma)\right\}, \tag{2.14}$$

$$\vec{G}(\Gamma) := \left\{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \vec{v} = \nabla\varphi, \int\limits_\Gamma \varphi d\Gamma = 0\right\}, \tag{2.15}$$

где операции $\operatorname{div}\vec{u}$ и $u_n := (\vec{u} \cdot \vec{n})|_{\partial\Gamma}$ понимаются в смысле обобщенных функций (см., например, [6, с. 100 – 102]).

Введем также пространство H^1_Γ скалярных функций из $L_{2,\Gamma}$ с квадратом нормы

$$\|\varphi\|^2_{H^1_\Gamma} := \int\limits_\Gamma |\nabla\varphi|^2 d\Gamma, \quad \int\limits_\Gamma \varphi d\Gamma = 0,$$

эквивалентной стандартной норме пространства Соболева $H^1(\Gamma)$. Очевидно, между пространствами потенциальных $\vec{G}(\Gamma)$ и скалярных H^1_Γ полей имеет место изометрический изоморфизм.

Введем, наконец, пространство векторных полей $\vec{L}_{2,\mathrm{div}}$:

$$\vec{L}_{2,\mathrm{div}} := \Big\{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma)\Big\}$$

с квадратом нормы

$$\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_{2,\mathrm{div}}} := \int\limits_\Gamma \left(|\vec{v}|^2 + |\mathrm{div}\,\vec{v}|^2\right) d\Gamma.$$

Лемма 2.2. *Имеют место следующие утверждения:*

1^0) справедливы соотношения

$$\mathcal{D}(M_{12}) = \left(H^1_\Gamma\right)^m \subset (L_{2,\Gamma})^m, \quad M_{12} : \mathcal{D}(M_{12}) \longrightarrow \Big(\vec{G}(\Gamma)\Big)^m \subset \Big(\vec{L}_2(\Gamma)\Big)^m, \tag{2.16}$$

$$\mathrm{Ker}\, M_{12} = \{0\};$$

2^0) выполняются соотношения

$$\mathcal{D}(M_{21}) = \Big(\vec{L}_{2,\mathrm{div}}\Big)^m \subset \Big(\vec{L}_2(\Gamma)\Big)^m, \quad M_{21} : \Big(\vec{L}_{2,\mathrm{div}}\Big)^m \longrightarrow (L_{2,\Gamma})^m, \tag{2.17}$$

$$\mathrm{Ker}\, M_{21} = \Big(\vec{J}_0(\Gamma)\Big)^m;$$

3^0) операторы M_{12} и M_{21}, заданные соответственно на областях определения (2.16) и (2.17), взаимно кососопряжены:

$$M^*_{12} = -M_{21}.$$

Более детальное описание пространства $\vec{L}_{2,\mathrm{div}}$ содержится в следующем утверждении.

Лемма 2.3. *Пусть граница $\partial\Gamma$ области Γ является липшицевой. Тогда*

$$\vec{L}_{2,\mathrm{div}} = \Big\{\vec{v} = \vec{w} + \vec{\nabla}\varphi \in \vec{L}_2(\Gamma) : \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma), \nabla\varphi = \nabla(A^{-1}f) \in \vec{G}(\Gamma)\Big\},$$

где A — оператор краевой задачи

$$A\varphi := -\triangle\varphi = f \quad (\textit{в } \Gamma), \quad f \in L_{2,\Gamma}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на } \partial\Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \varphi d\Gamma = 0. \tag{2.18}$$

Замечание 2.1. Как известно (см., например, [7], а также [8, с. 89]), оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_{2,\Gamma} \longrightarrow L_{2,\Gamma}$ самосопряжен и положительно определен в пространстве $L_{2,\Gamma}$, а его областью определения $\mathcal{D}(A)$ является совокупность обобщенных решений задачи Неймана (2.18) при всех $f \in L_{2,\Gamma}$. При этом $H^1_\Gamma = \mathcal{D}(A^{1/2})$.

3. Исследование свойств основного оператора задачи. Рассмотрим далее простейший вариант исследуемой задачи (2.7), (2.8), соответствующий случаю невращающейся гидросистемы, когда $\omega_0 = 0$. Будем считать для простоты, что все физические константы в (2.9), (2.10) равны единице, в том числе и разности плотностей. Наконец, изучим собственные колебания гидросистемы, т. е. такие решения упрощенной задачи (2.7), которые зависят от t по закону

$$\vec{v}(t) = e^{i\omega t}\vec{v}, \quad \eta(t) = e^{i\omega t}\eta,$$

где ω — частота колебаний, а $\vec{v}$, η — амплитудные элементы.

Возникает спектральная задача вида

$$\begin{pmatrix} 0 & M^0_{12} \\ M^0_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \end{pmatrix}, \ \ \vec{v} = (\vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m)^\tau, \ \ \eta = (\eta_1; \ldots; \eta_m)^\tau, \ \ \lambda = -i\omega, \tag{3.1}$$

$$M^0_{12} := \begin{pmatrix} \nabla & 0 & \ldots & 0 \\ \nabla & \nabla & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nabla & \nabla & \ldots & \nabla \end{pmatrix}, \quad M^0_{21} := \begin{pmatrix} \mathrm{div} & \mathrm{div} & \ldots & \mathrm{div} \\ 0 & \mathrm{div} & \ldots & \mathrm{div} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{div} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\vec{v}_k \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_k), \quad \int\limits_\Gamma \eta_k d\Gamma = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{3.3}$$

Будем трактовать эту задачу как задачу на собственные значения

$$\mathcal{A}z = \lambda z, \quad z = (\vec{v}; \eta)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H},$$

в пространстве

$$\mathcal{H} := \left(\vec{L}_2(\Gamma)\right)^m \oplus (L_{2,\Gamma})^m$$

для операторной матрицы (3.1), (3.2), заданной на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left(\vec{L}_{2,\mathrm{div}}\right)^m \oplus \left(H^1_\Gamma\right)^m.$$

Тогда, как следует из леммы 2.2, оператор $\mathcal{A}$ является неограниченным кососамосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}$. Поэтому его спектр расположен на мнимой оси, а собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Изучим более подробно свойства спектра оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 3.1. *Оператор $\mathcal{A}$ имеет бесконечномерное ядро вида*

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \left\{(\vec{v}; 0)^\tau : \vec{v} = (\vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m)^\tau, \ \vec{v}_k \in \vec{J}_0(\Gamma), \ k = \overline{1, m}\right\}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь свойства решений спектральной задачи на ортогональном (в $\mathcal{H}$) дополнении к ядру оператора $\mathcal{A}$. Если $\lambda \neq 0$, то на основании первого соотношения системы уравнений

$$M_{12}^0 \eta = \lambda \vec{v}, \quad M_{21}^0 \vec{v} = \lambda \eta, \tag{3.5}$$

равносильной задаче (3.1), и определений операторов M_{12}^0 и M_{21}^0 (см. (2.9), (2.10)) приходим к выводу, что

$$\vec{v}_k = \nabla \varphi_k \in \vec{G}(\Gamma), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда в силу условий нормировки элементов из $\vec{G}(\Gamma)$ (см. (2.15)) имеем связи

$$\eta_1 = \lambda \varphi_1, \ \eta_1 + \eta_2 = \lambda \varphi_2, \ \ldots, \ \eta_1 + \ldots + \eta_m = \lambda \varphi_m. \tag{3.6}$$

Подставляя эти соотношения во вторую группу уравнений (3.5), а также вводя оператор A краевой задачи (2.18), учитывающий также условия (3.3), приходим к спектральной задаче

$$A\varphi_1 + A\varphi_2 + \ldots + A\varphi_m = \mu \varphi_1, \ A\varphi_2 + \ldots + A\varphi_m = \mu(\varphi_2 - \varphi_1), \ldots,$$
$$A\varphi_m = \mu(\varphi_m - \varphi_{m-1}), \quad \mu := -\lambda^2.$$

Ее, в свою очередь, можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \ldots \\ \varphi_m \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2I & -I & 0 & \ldots & 0 \\ -I & 2I & -I & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 2I & I \\ 0 & 0 & \ldots & -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \ldots \\ \varphi_m \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

или кратко

$$\mathcal{A}_m \varphi = \mu \mathcal{J}_m \varphi, \quad \varphi = (\varphi_1; \ldots; \varphi_m)^m \in (L_{2,\Gamma})^m. \tag{3.8}$$

Лемма 3.2. *Оператор $\mathcal{A}_m$, заданный на области определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_m) = (\mathcal{D}(A))^m \subset (L_{2,\Gamma})^m,$$

является неограниченным положительно определенным самосопряженным оператором с дискретным спектром $\{\mu_j(\mathcal{A}_m)\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu_j(\mathcal{A}_m) \to +\infty$ $(j \to \infty)$. Собственные элементы $\{\varphi^j\}_{j=1}^{\infty}$, $\varphi^j = \left(\varphi_1^j; \ldots; \varphi_m^j\right)^{\tau}$, оператора $\mathcal{A}_m$ образуют ортогональный базис как в пространстве $(L_{2,\Gamma})^m$, так и в энергетическом пространстве $\left(H_\Gamma^1\right)^m$.

Лемма 3.3. *Оператор $\mathcal{J}_m$ из (3.7), (3.8) является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $(L_{2,\Gamma})^m$.*

Следствием лемм 3.2 и 3.3 является такое утверждение (см. [7, 8]).

Теорема 3.1. *Задача (3.8) имеет дискретный положительный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu_j \to \to +\infty$ $(j \to \infty)$, *и систему собственных элементов, образующих ортогональный базис как в энергетическом пространстве оператора* $\mathcal{A}_m$, *т. е. в пространстве* $\left(H_\Gamma^1\right)^m$, *так и в энергетическом пространстве оператора* $\mathcal{J}_m$, *т. е. по форме* $(\mathcal{J}_m\varphi,\varphi)_{\left(L_{2,\Gamma}\right)^m} = = \|\mathcal{J}_m^{1/2}\varphi\|^2_{\left(L_{2,\Gamma}\right)^m}$ *оператора* $\mathcal{J}_m$.

Теорема 3.2. *Спектральная проблема (3.1) – (3.3) имеет чисто точечный спектр, расположенный на мнимой оси симметрично относительно* $\mathbb{R}$:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{0\} \cup \{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty} \cup \{\lambda_j^-\}_{j=1}^{\infty}, \quad \lambda_j^{\pm} = \pm i\mu_j^{1/2}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{3.9}$$

При этом нулевое собственное значение бесконечнократно, и ему соответствует собственное подпространство $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ *из (3.4). Оставшаяся часть спектра дискретна (см. (3.9)), и система собственных элементов*

$$z_j^{\pm} = \left(\nabla(\varphi^j)^{\pm}; (\eta^j)^{\pm}\right)^{\tau}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где $(\varphi^j)^{\pm} = \varphi^j = \left(\varphi_1^j; \ldots; \varphi_m^j\right)^{\tau}$ *— собственные элементы задачи (3.8), а элементы* $(\eta^j)^{\pm} = \left((\eta^j)_1^{\pm}; \ldots; (\eta^j)_m^{\pm}\right)^{\tau}$ *выражаются формулами вида (3.6) через элементы* φ^j *с* $\lambda = \lambda_j^{\pm}$, $j = 1, 2, \ldots$, *образует ортогональный базис в подпространстве* $\vec{G}(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$ *пространства* $\left(\vec{L}_2(\Gamma)\right)^m \oplus (L_{2,\Gamma})^m = \mathcal{H}$.

4. Заключительные замечания. Из проведенных рассуждений следует, что и в спектральной задаче вида (3.1) с операторами M_{12} и M_{21} из (2.9), (2.10) общие свойства спектра те же, что и в рассмотренной в п. 3 упрощенной спектральной задаче. Это позволяет установить общие свойства решений в задаче о колебаниях системы тонких слоев идеальной жидкости как при отсутствии вращения гидросистемы ($\omega_0 = 0$), так и при наличии равномерного вращения ($\omega_0 \neq 0$).

Отметим, что аналогичным образом можно исследовать задачу, когда дно бассейна, т. е. поверхность Γ_{m+1}, не является горизонтальным.

Заметим также, что при $\omega_0 = 0$ собственные значения μ_j задачи (3.8) можно выразить через собственные значения $\lambda_j(A)$ оператора A, воспользовавшись вариационным принципом для собственных значений этой задачи.

Наконец, при $\omega_0 \neq 0$ можно использовать метод Ритца – Галеркина, предложенный в [3] для случая одной жидкости ($m = 1$).

Эта программа исследований будет реализована в последующих работах. Автор выражает благодарность проф. Копачевскому Н. Д. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

1. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. — М.: Мир, 1981. — Т. 1. — 480 с.

2. *Иванов Ю. Б., Копачевский Н. Д.* О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости // Тавр. вестн. информатики и математики. — 2003. — № 1. — С. 61 – 77.

3. *Копачевский Н. Д.* Собственные колебания вращающегося слоя идеальной жидкости // Тавр. вестн. информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 3 – 27.

4. *Каменкович В. М., Монин А. С.* Океанология. Физика океана. Т. 2. Динамика океана. — М.: Наука, 1978. — 435 с.

5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1977. — 432 с.

8. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики: Спец. курс лекций. — Симферополь: Форма, 2008. — 140 с.

9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

Получено 25.11.13