УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

В. В. Городецький, Р. І. Петришин, Т. С. Тодоріко

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2
e-mail: tanuha_k@bk.ru

We prove correct solvability of time multipoint nonlocal problem for an evolution equation with infinite order differential operator.

Установлена корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования бесконечного порядка.

І. М. Гельфанд та Г. Є. Шилов у монографії [1] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ — подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з φ, то маємо простір Л. Шварца $S = S(\mathbb{R})$ швидкоспадних на $\mathbb{R}$ функцій. На теперішній час найбільш детально вивчено випадок, коли $c_{kn} = k^{k\alpha}n^{n\beta}$, де α, $\beta > 0$ — фіксовані параметри; відповідні простори при цьому позначають символом S_α^β.

У статті [2] досліджено випадок, коли $c_{kn} = l_k m_n$, де $\{l_k\}$ та $\{m_n\}$ — монотонно зростаючі послідовності додатних чисел, які задовольняють певні умови (відповідні простори позначають символом $S_{l_k}^{m_n}$). Встановлено, що у просторах $S_{l_k}^{m_n}$ визначено неперервні оператори множення на x, на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови, оператори диференціювання, зсуву аргументу та розтягу. З точки зору застосування у теорії рівнянь з частинними похідними науковий інтерес становить вивчення питання про існування у просторах типу $S_{l_k}^{m_n}$ оператора диференціювання „нескінченного порядку" вигляду $\varphi(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$, $D = d/dx$, побудованого за нескінченно диференційовною функцією $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. У першому пункті дано позитивну відповідь на поставлене питання; при цьому встановлено, що $\varphi(D)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним символом. Отже, еволюційні рівняння з оператором $\varphi(D)$ належать до класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь і містять, зокрема, рівняння з частинними похідними вигляду $\partial u/\partial t = \sum_{k=0}^{m} c_k D^k u$, $m \in \mathbb{N}$ є фіксованим. У другому пункті досліджено нелокальну багатоточкову за часом задачу для еволюційного рівняння з оператором $\varphi(D)$ у випадку, коли функція, за допомогою якої ставиться багатоточкова задача, є елементом простору типу $S_{l_k}^{m_n}$, та узагальненою функцією нескінченного порядку типу ультрарозподілів (у просторах $S_{l_k}^{m_n}$ та топологічно спряжених до них просторах $(S_{l_k}^{m_n})'$ вказана задача для еволюційних рівнянь з оператором $\varphi(D)$ раніше не досліджувалась; детальний огляд праць, які стосуються нелокальних задач для рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь, див. у [3]). При цьому, попередньо, вивчено структуру та властивості фундаментального розв'язку такої задачі, встановлено її коректну розв'язність у відповідних просторах. Знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією.

1. Простори основних та узагальнених функцій. Розглянемо послідовність $\{\rho_n, n \in \in \mathbb{Z}_+\}$, $\rho_0 = 1$, додатних чисел, яка має такі властивості: а) є монотонно спадною; б) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. За допомогою послідовності $\{\rho_n\}$ побудуємо послідовність $\{m_n\}$ за правилом $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Із результатів, наведених у [2], випливає, що послідовність $\{m_n\}$ задовольняє такі умови:

1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_n \leq m_{n+1}, m_0 = 1$;
2) $\forall \alpha > 0\, \exists c_\alpha > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_n \geq c_\alpha \alpha^n$;
3) $\exists M > 0\, \exists h > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_{n+1} \leq M h^n m_n$;
4) $\exists \gamma > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_n^2 \leq \gamma m_{n-1} m_{n+1}$;
5) $\exists A > 0\, \exists L > 0\, \forall \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+ : m_n m_l \leq A L^{n+l} m_{n+l}$.

Розглянемо послідовність $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка також має властивості а), б), та послідовність $\{l_k = k! d_k\}$. Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, що задовольняють умову

$$\exists\, c, A, B > 0\, \forall \{k,\, n\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n l_k m_n.$$

$S_{l_k}^{m_n}$ збігається з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де символом $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ позначено сукупність функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, котрі при довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності [2]

$$\exists\, A, B > 0\, \forall \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \exists c_{\delta\rho} > 0\, \forall \{k,\, n\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n l_k m_n;$$

система норм в $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta,\,\rho} = \sup_{x,\,k,\,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

У статті [2] встановлено, що функція $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists\, a, b, c > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by), \tag{1}$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_k (l_k/|x|^k), & |x| \geq 1 \end{cases} \qquad \rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup_n (|y|^n/m_n), & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Зазначимо, що ρ — неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$; при цьому $\ln \rho$ — опукла на $(0, +\infty)$

функція [2], тобто

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty) : \ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \le \ln \rho(y_1 + y_2). \tag{2}$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n\delta}$, $0 < \delta < 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\rho(y) \sim \exp(|y|^{1/\delta})$.

Функція ρ в (1) пов'язана з послідовністю $\{\rho_n\}$, за якою будується послідовність $\{m_n = n!\rho_n\}$ таким чином [2]: $\rho_n = \inf_{|\omega|\ge 1}(\rho(\omega)/|\omega|^n) = \nu_n^{-n}\rho(\nu_n)$, де ν_n — розв'язок рівняння $\omega\mu(\omega) = n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\omega) = \rho^{'}(\omega)/\rho(\omega)$; послідовність $\{\nu_n\}$ є монотонно зростаючою й необмеженою, $\nu_n < n$, $n \in \mathbb{N}$ [2]. Далі вважатимемо, що послідовність $\{\nu_n\}$ задовольняє умову $\lim_{n\to\infty} n\nu_n^{-2} = 0$.

Оскільки $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$, де $\tilde{\gamma}(x) = 1$, $|x| < 1$ і $\tilde{\gamma}(x) = \sup_k(|x|^k/l_k)$, якщо $|x| > 1$, то γ — неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$, $0 < \gamma(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, якщо $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, то виконуються нерівності [1]

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{e}\,|x|^{1/\alpha}\right) \le \gamma(x) \le c\exp\left(-\frac{\alpha}{e}\,|x|^{1/\alpha}\right), \quad c = e^{\alpha l/2}.$$

Функція $\ln\gamma$ задовольняє на $(0, +\infty)$ нерівність [2]

$$\ln\gamma(x_1) + \ln\gamma(x_2) \ge \ln\gamma(x_1 + x_2), \quad \{x_1,\, x_2\} \subset (0, +\infty). \tag{3}$$

У введених просторах $S_{l_k}^{m_n}$ визначено обмежені (а отже, і неперервні) лінійні оператори, важливі для аналізу; насамперед це оператори множення на x, на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву та розтягу.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій із простору $S_{l_k}^{m_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. У просторі $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна ввести топологію індуктивної границі зліченно-нормованих просторів. При цьому, як випливає з (1) (див. також [2]), послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \ge 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$. У цьому випадку справджуються нерівності $|\varphi_\nu(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν. Мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ є кожна ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, c_\varepsilon > 0 : |f(z)| \le c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Відповідно, функція $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, є мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}$.

Символом $(S_{l_k}^{m_n})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в основному просторі $S_{l_k}^{m_n}$ визначено операцію зсуву аргументу $T_x : \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ з основною задамо формулою $(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi)\rangle$ (індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на φ як на функцію аргументу ξ, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$); при цьому $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною функцією.

Простори типу S тісно пов'язані між собою за допомогою перетворення Фур'є, а саме, правильною є формула [1] $F[S_{l_k}^{m_n}] = S_{m_k}^{l_n}$. Оскільки кожний простір типу S разом із кожною функцією $\varphi(x)$ містить також функцію $\varphi(-x)$ і $F^{-1}[\varphi] = (2\pi)^{-1}F[\varphi(-\xi)]$, то у зв'язку з цим перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ визначимо за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle\ \forall \varphi \in S_{m_k}^{l_n}$, при цьому $F[f] \in (S_{m_k}^{l_n})'$.

Якщо $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ — згортувач у просторі $S_{l_k}^{m_n}$, то для довільної функції $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ справджується формула $F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi]$ [2].

2. Оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу S. Нехай $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, — деяка ціла функція. Говоритимемо, що у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ задано оператор диференціювання нескінченного порядку $g(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(iD)^n$, $D = d/dz$, якщо для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ ряд

$$\psi(z) \equiv (g(D)\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(iD)^n\varphi(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

зображує основну функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ (тут $\{m_n\}$ — послідовність, побудована в п. 1). Звуження оператора $g(D)$ на простір $S_{m_k}^{m_n}$, яке позначатимемо символом A_g, називатимемо диференціальним оператором нескінченного порядку в просторі $S_{m_k}^{m_n}$. Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо ціла функція g — мультиплікатор у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, то в цьому просторі визначено неперервний оператор $g(D)$, при цьому*

$$(A_g\varphi)(x) = F^{-1}[g(\sigma)F[\varphi](\sigma)](x), \quad \{x, \sigma\} \subset \mathbb{R}, \quad \varphi \in S_{m_k}^{m_n}. \tag{4}$$

Доведення. Перша частина сформульованого твердження випливає з теореми 4 [2]. Доведемо, що справедливою є формула (4). Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$F[\psi](\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F[(iD)^n\varphi](\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\sigma^n F[\varphi](\sigma) = g(\sigma)F[\varphi](\sigma), \quad \varphi \in S_{m_k}^{m_n}, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Оскільки $F[\varphi] \in S_{m_k}^{m_n}$, а g – мультиплікатор у цьому просторі, то $gF[\varphi] \in S_{m_k}^{m_n}$. Тоді функцію $gF[\varphi]$ можна аналітично продовжити у всю комплексну площину, при цьому $(gF[\varphi])(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, $z = \sigma + iy \in \mathbb{C}$. Отже, залишилось довести коректність проведених перетворень та обґрунтувати правильність формул (5). Звідси вже випливатиме співвідношення (4). Для цього досить встановити, що $r_n(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k F[\varphi](z) \to 0$, $n \to \infty$, у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно показати, що: 1) послідовність $\{r_n, n \geq 1\} \subset S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$; 2) ця послідовність рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому справджуються нерівності

$$|r_n(z)| \leq c\gamma(a\sigma)\rho(by), \quad \gamma = 1/\rho, \quad z = \sigma + iy \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

з деякими сталими $a, b, c > 0$, не залежними від n.

Коефіцієнти Тейлора c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, функції g обчислюються за формулою Коші

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умов теореми (g — мультиплікатор в $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$) отримуємо

$$|c_n| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma(\varepsilon R))^{-1}}{R^{n/2}} \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^{n/2}} = c_\varepsilon \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^{n/2}} \inf \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^{n/2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Оцінимо окремо коефіцієнти c_{2k} та c_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \left(\inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k} \right)^2 = c_\varepsilon \varepsilon^{2k} \left(\inf \frac{\rho(\varepsilon R)}{(\varepsilon R)^k} \right)^2 = c_\varepsilon \varepsilon^{2k} \rho_k^2. \tag{6}$$

Аналогічно,

$$|c_{2k+1}| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k} \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^{k+1}} \leq c_\varepsilon \varepsilon^{2k+1} \rho_k \rho_{k+1} \leq c_\varepsilon \varepsilon^{2k+1} \rho_k^2 \tag{7}$$

(тут враховано, що послідовність $\{\rho_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно спадною).

Далі оцінимо функції $\alpha_n(z) := |c_n z^n F[\varphi](z)|$, $z \in \mathbb{C}$, при фіксованому $n \in \mathbb{N}$, якщо $n = 2k$ та $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, врахувавши при цьому нерівності (6) та (7) відповідно. Нехай $n = 2k$. Оскільки $F[\varphi] \in S_{m_k}^{m_n}$, то

$$\exists\, c, a, b > 0 \; \forall z = \sigma + iy \in \mathbb{C} : |F[\varphi](z)| \leq c\gamma(a\sigma)\rho(by), \gamma = 1/\rho.$$

Крім того,

$$|z|^{2k} = (\sigma^2 + y^2)^k \leq (2\max\{\sigma^2, y^2\})^k \leq 2^k(|\sigma|^{2k} + |y|^{2k}).$$

Отже,

$$\alpha_{2k}(z) \leq cc_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} \rho_k^2 (|\sigma|^{2k} + |y|^{2k}) \gamma(a\sigma)\rho(by) =$$
$$= cc_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} (\rho_k^2 |\sigma|^{2k} \gamma(a\sigma)\rho(by) + \rho_k^2 |y|^{2k} \gamma(a\sigma)\rho(by)) \equiv cc_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} (\Delta_k^{'}(z) + \Delta_k^{''}(z)).$$

Оскільки

$$\rho_k = \inf_{\sigma \neq 0} \frac{\rho(\sigma)}{|\sigma|^k} = \left(\frac{a}{4}\right)^k \inf \frac{\rho(\frac{a}{4}\sigma)}{|\frac{a}{4}\sigma|^k},$$

то

$$\rho_k^2 |\sigma|^{2k} \leq \left(\frac{a}{4}\right)^{2k} \frac{\rho^2\left(\frac{a}{4}\,\sigma\right)}{\left|\frac{a}{4}\,\sigma\right|^{2k}} |\sigma|^{2k} = \rho^2 \left(\frac{a}{4}\,\sigma\right).$$

Із нерівності (3) випливає, що

$$\gamma\left(\frac{a}{2}\,\sigma\right) = \gamma\left(\frac{a}{4}\,\sigma + \frac{a}{4}\,\sigma\right) \leq \gamma^2\left(\frac{a}{4}\,\sigma\right). \tag{8}$$

Оскільки $\rho = 1/\gamma$, то з урахуванням (8) знайдемо

$$\Delta_k^{'}(z) = \rho_k^2 |\sigma|^{2k} \gamma(a\sigma)\rho(by) \leq \rho^2\left(\frac{a}{4}\,\sigma\right) \gamma\left(\frac{a}{2}\,\sigma\right) \gamma\left(\frac{a}{2}\,\sigma\right) \rho(by) \leq$$
$$\leq \frac{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\,\sigma\right)}{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\,\sigma\right)} \gamma\left(\frac{a}{2}\,\sigma\right) \rho(by) = \gamma\left(\frac{a}{2}\,\sigma\right) \rho(by).$$

Оцінимо $\Delta_k''(z)$. Маємо

$$|y|^{2k} \leq (2k)!e^{|y|} \leq \alpha \cdot 2^k k! e^{\ln \rho(\varepsilon_1 y)} = \alpha \cdot 2^k k! \rho(\varepsilon_1 y),$$

де $\varepsilon_1 > 0$ — довільно фіксоване число (тут враховано властивість опуклості функції $\ln \rho$).
Врахувавши ще раз цю властивість (див. (2)), знайдемо

$$\Delta_k''(z) \leq \alpha 2^k k! \gamma(a\sigma)\rho(\varepsilon_1 y)\rho(by) \leq \alpha 2^k k! \rho_k^2 \rho(b_1 y)\gamma(a\sigma), \quad b_1 = b + \varepsilon_1.$$

Далі скористаємося тим, що $\rho_k = \nu_k^{-k}\rho(\nu_k)$ (див. п. 1). При цьому

$$\rho(\nu_k) = e^{\ln \rho(\nu_k)} = e^{\int_0^{\nu_k} (\ln \rho(\xi))' d\xi} \equiv e^{\int_0^{\nu_k} \mu(\xi) d\xi}.$$

Згідно з теоремою про середнє значення

$$\forall\, k \geq 1 \;\exists\, y_k \in (0, \nu_k) : \rho(\nu_k) = e^{\nu_k \mu(y_k)}.$$

Функція μ є зростаючою і неперервною на $(0, \infty)$, тому $\rho(\nu_k) \leq e^{\nu_k \mu(\nu_k)} = e^k$. Отже, $\rho(\nu_k) \leq \nu_k^{-1} e^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а

$$\Delta_k''(z) \leq \alpha (2e)^k \left(\frac{k}{\nu_k^2}\right)^k \gamma(a\sigma)\rho(b_1 y), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Із умови $\lim_{k\to+\infty} k\nu_k^{-2} = 0$ (див. п. 1) випливає обмеженість відповідної послідовності. Таким чином, маємо нерівність

$$\alpha_{2k}(z) \leq \beta A^k \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1 y), \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогічно оцінюємо функції $\alpha_{2k+1}(z)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$. В результаті дістанемо

$$\alpha_n(z) \leq \tilde{\beta} \widetilde{A}^k \varepsilon^k \gamma(a_2\sigma)\rho(b_2 y), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad z \in \mathbb{C},$$

причому всі сталі не залежать від n. Отже,

$$|r_n(z)| \leq \tilde{\beta} \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{A}^k \varepsilon^k \gamma(a_2\sigma)\rho(b_2 y), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Покладемо $\varepsilon = (2\widetilde{A})^{-1}$. Тоді $\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{A}^k \varepsilon^k = 2^{-n}$, тобто

$$|r_n(z)| \leq \frac{\tilde{\beta}}{2^n} \gamma(a_2\sigma)\rho(b_2 y), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Із (9) випливає, що: а) $r_n \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ (тобто умова 1) виконується); б) послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, при цьому $|r_n(z)| \leq \tilde{\beta}\gamma(a_2\sigma)\rho(b_2 y)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, сталі $\tilde{\beta}$, $a_2, b_2 > 0$

не залежать від n. Отже, послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Цим доведено, що оператор $g(D)$ визначено у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, причому кожну обмежену множину цього простору він переводить в обмежену множину цього ж простору. Таким чином, оператор $g(D)$ є неперервним у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, а оператор A_g — визначеним і неперервним у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, при цьому із співвідношення (5) випливає, що правильною є рівність (4).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Міркуючи, як і при доведенні теореми 1, отримуємо таке твердження: якщо ціла функція $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, — мультиплікатор у просторі $S_{m_k}^{l_n}(\mathbb{C})$, то у просторі $S_{l_k}^{m_n}$ оператор $g(D)$ визначений і неперервний, при цьому для довільної функції $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ справджується рівність (4) (послідовності $\{l_k\}$ та $\{m_n\}$ такі, що функції γ та ρ, пов'язані з цими послідовностями, задовольняють умову $\rho'/\rho \leq \tilde{\gamma}'/\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$).

3. Нелокальна m-точкова за часом задача. Символом $P_{l_k}^{n!\rho_n}$ позначимо клас цілих однозначних функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами у просторі $S_{l_k}^{n!\rho_n}$ (як функції змінної $x \in \mathbb{R}$) і такими, що $e^{\varphi} \in S_{l_k}^{n!\rho_n}$ (про послідовності $\{l_k\}$, $\{n!\rho_n\}$ див. п. 1).

Якщо φ — мультиплікатор у просторі $S_{l_k}^{n!\rho_n}$, то для довільної функції $\psi \in S_{a_k}^{l_n}$, де $a_k \geq k!\rho_k$, $\varphi F[\psi] \in S_{l_k}^{a_n}$, оскільки $F[\psi] \in S_{l_k}^{a_n}$, а функція φ, очевидно, є мультиплікатором і у просторі $S_{l_k}^{a_n}$. Тоді

$$A_{\varphi}\psi = F^{-1}[\varphi F[\psi]] \in S_{a_k}^{l_n}.$$

Отже, псевдодиференціальний оператор A_{φ}, побудований за функцією φ, є визначеним у кожному просторі $S_{a_k}^{l_n}$, де $a_k \geq k!p_k$, відображає цей простір в себе і неперервний; при цьому, з іншого боку, A_{φ} можна розуміти як диференціальний оператор нескінченного порядку, який діє у просторі $S_{a_k}^{l_n}$ (вигляд послідовності $\{a_k\}$, яка задовольняє умови 1–5, вкажемо пізніше).

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_{\varphi}u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad 0 < T < \infty, \tag{10}$$

задамо багатоточкову нелокальну за часом задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_n u(t, \cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{11}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $(t_1, \ldots, t_m) \subset (0, T]$ — фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $f \in S_{a_k}^{l_n}$.

Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T], S_{a_k}^{l_n})$ задачі (10), (11) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t, x) = F[v(t, \cdot)](x)$. Для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} = \varphi(\sigma)v(t, \sigma), \quad (t, \sigma) \in \Omega, \tag{12}$$

$$\mu v(t, \sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t, \sigma)|_{t=t_k} = \widetilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

де $\widetilde{f}(\sigma) = F^{-1}[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{t\varphi(\sigma)\}, \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{14}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (13). Підставивши (14) в (13), знайдемо

$$c = \tilde{f}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (10), (11) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Введемо позначення $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, знаходимо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\right)e^{i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left((2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma\right)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{15}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже правильність формул (15), випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції Q як функції аргументу x.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in P_{l_k}^{n!\rho_n}$. Тоді існують додатні числа c, a, b такі, що для похідних функції $Q_1(t,\, x) = \exp\{t\varphi(x)\}$, $x \in \mathbb{R}$, при фіксованому $t \in (0,T]$ справджуються нерівності*

$$|D_x^n Q_1(t,\, x)| \le c\tilde{b}^n n!\rho_n e^{-t\ln\tilde{\gamma}(ax)} \le c\tilde{b}^n n!\rho_n e^{-\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}x)}, \tag{16}$$

$$\tilde{\gamma} = 1/\gamma, \quad \tilde{a} = a\{t\}, \quad \tilde{b} = \max\{b, bt\}.$$

Доведення твердження ґрунтується на властивості опуклості функцій $\ln\tilde{\gamma}$, $\ln\rho$ та інтегральній формулі Коші.

Лема 2. *Функція*

$$Q_2(x) := \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k\varphi(x)\}\right)^{-1} \equiv \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, x)\right)^{-1}$$

є мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{a_n}$, *де* $a_n = n^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Для встановлення твердження оцінимо похідні функції Q_2. З цією метою скористаємося формулою Фаа де Бруно

$$D_x^s F(g(x)) = \sum_{p=1}^{s} \frac{d^p}{dg^p} F(g) \sum \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \left(\frac{d}{dx}\, g(x)\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{dx^l}\, g(x)\right)^{m_l}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $m_1 + 2m_2 + \ldots + lm_l = s$, $m_1 + \ldots + m_l = p$. У цій формулі покладемо $F = g^{-1}$, $g = R$, $R(x) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, x)$. Тоді $Q_2(x) = F(R(x))$ і

$$\frac{d^p}{dg^p}\, F(R) = \frac{d^p}{dR^p}\, R^{-1} = (-1)^p p! R^{-(p+1)}.$$

Далі, врахувавши нерівності (16), знайдемо

$$\left|\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{dx^l} R(x)\right| \le \frac{1}{l!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \left|\frac{d^l}{dx^l}\, Q_1(t_k, x)\right| \le \frac{1}{l!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \tilde{b}^l l! \rho_l e^{-t_k \ln\tilde{\gamma}(ax)} \le \tilde{c}\widetilde{B}^l \rho_l e^{-t_1 \ln\tilde{\gamma}(ax)},$$

$$\tilde{c} = c \sum_{k=1}^{m} \mu_k, \quad \widetilde{B} = \max\{b, bT\},$$

$b > 0$ — стала з нерівності (16),

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\, R(x)\right)^{m_1}\right| \ldots \left|\left(\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{dx^l}\, R(x)\right)^{m_l}\right| \le \tilde{c}^{m_1}\tilde{b}^{m_1}\rho_1^{m_1} e^{-t_1 m_1 \ln\tilde{\gamma}(ax)} \ldots \tilde{c}^{m_l}\tilde{b}^{m_l}\rho_l^{m_l} e^{-t_1 m_l \ln\tilde{\gamma}(ax)} \le$$

$$\le (\tilde{c}\rho_1)^{m_1+\ldots+m_l} \tilde{b}^{m_1+2m_2+\ldots+lm_l} e^{-(m_1+\ldots+m_l)t_1 \ln\tilde{\gamma}(ax)} =$$

$$= (\tilde{c}\rho_1)^p \tilde{b}^s e^{-pt_1 \ln\tilde{\gamma}(ax)} \le \tilde{\tilde{c}}^s \tilde{b}^s e^{-t_1 \ln\tilde{\gamma}(ax)}, \quad \tilde{\tilde{c}} = \max\{1, \tilde{c}\rho_1\}$$

(тут ми скористалися тим, що послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно спадною).

З оцінок (16) випливають нерівності

$$Q_1(t_k, x) \le \beta_0 e^{-t_k \ln\tilde{\gamma}(ax)} \le \beta_0 e^{-t_1 \ln\tilde{\gamma}(ax)} \le \beta_0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Тоді

$$R(x) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, x) \geq \mu - \beta_0 \sum_{k=1}^{m} \mu_k \equiv \mu_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Далі вважатимемо, що $\mu > \beta_0 \sum_{k=1}^{m} \mu_k$. Отже, $\mu_0 > 0$ і $|R^{-(p+1)}(x)| \leq \mu_0^{-(p+1)}$, $x \in \mathbb{R}$. Підсумовуючи, знаходимо

$$|D_x^s Q_2(x)| = |D_x^s F(R(x))| \leq b_0 B_0^s (s!)^2 e^{-t_1 \ln \tilde{\gamma}(ax)} \leq b B^s s^{2s} e^{-t_1 \ln \tilde{\gamma}(ax)} \leq$$

$$\leq b B^s s^{2s} e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x)} = b B^s s^{2s} \gamma(a_1 x), \quad a_1 = a\{t_1\}.$$

Звідси та з (17) випливає сформульована в лемі 2 властивість функції Q_2.

Лему доведено.

Наслідок 1. *При фіксованому $t \in (0, T]$ функція $Q(t,x) = Q_1(t,x) Q_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, є елементом простору $S_{l_k}^{a_n}$, $a_n = n^{2n}$, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_x^s Q(t,x)| \leq c B^s s^{2s} e^{-t \ln \tilde{\gamma}(ax)} \leq c B^s s^{2s} e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x)}, \tag{18}$$

де $a_1 = at$, якщо $0 < t \leq 1$, і $a_1 = a\{t\}$, якщо $t > 1$, сталі $c, B, a > 0$ не залежать від t.

Далі вважатимемо, що в умові (11) f є елементом простору $S_{a_k}^{l_n}$, де $a_k = k^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Врахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[S_{l_k}^{a_n}] = S_{a_k}^{l_n}$, знайдемо, що $G(t, \cdot) = F^{-1}[Q(t, \cdot)] \in S_{a_k}^{l_n}$ при кожному $t \in (0, T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t, якщо $t \in (0, T^*]$, де $T^* = T$ за умови $T \leq 1$ і $T^* = 1$, якщо $T > 1$.

Використавши властивість опуклості функції $\ln \gamma$, отримаємо нерівність

$$\exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x)\} \leq \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a_1}{2}\, x\right)\right\} \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a_1}{2}\, x\right)\right\} \equiv$$

$$\equiv \gamma_1\left(\frac{a_1}{2}\, x\right) \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a_1}{2}\, x\right)\right\}, \quad \tilde{\gamma} = 1/\gamma.$$

Тоді

$$|x^k D_x^s Q(t,x)| \leq c B^s s^{2s} \inf_k \frac{l_k}{\left|\frac{a_1}{2}\, x\right|^k} |x|^k \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a_1}{2}\, x\right)\right\} \leq$$

$$\leq c B^s s^{2s} \left(\frac{2}{a_1}\right)^k l_k \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a_1}{2}\, x\right)\right\} = c \widetilde{A}^k B^s l_k s^{2s} \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a_1}{2}\, x\right)\right\} =$$

$$= c A^k t^{-k} B^s l_k s^{2s} \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{at}{2}\, x\right)\right\}, \tag{19}$$

$$\widetilde{A} = \frac{2}{a_1}, \quad a_1 = at, \quad A = \frac{2}{a}, \quad \{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Далі скористаємося співвідношенням $x^k D_x^s F[\varphi] = i^{k+s} F[(\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)}]$, $\varphi \in S_{l_k}^{a_n}$.

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1}(-1)^s i^{k+s} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,\,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

Зазначимо, що для послідовності $a_n = n^{2n}$ справджується нерівність $a_n/a_{n-1} \geq n/4 \equiv \equiv n^{1-\lambda}1/4,\ \lambda = 0$. Звідси та із результатів, отриманих в [1, с. 239 – 243], випливає, що подвійна послідовність $m_{kn} = l_k a_n = l_k n^{2n}$ задовольняє нерівність $knm_{k-1,n-1}/m_{kn} \leq \leq \gamma(k+n),\ \gamma > 0$. Тоді, застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (19) похідних функції $Q(t,\sigma)$ та останню нерівність, знайдемо

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \leq |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\, s(s-1) \times |\sigma^{s-2} Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \ldots \leq cA^s B^k t^{-s} l_k k^{2k} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{ks}{(A/t)B}\, \frac{l_{s-1}(k-1)^{2(k-1)}}{l_s k^{2k}} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{ks}{(A/t)^2 B^2}\frac{l_{s-1}(k-1)^{2(k-1)}}{l_s k^{2k}} \times\right.$$

$$\left.\times\ (k-1)(s-1)\frac{l_{s-2}(k-2)^{2(k-2)}}{l_{s-1}(k-1)^{2(k-1)}} + \ldots\right) e^{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}\,t\sigma\right)} \leq cA^s B^k t^{-s} l_s k^{2k} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\gamma}{(A/t)B}\,(k+s) + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{\gamma^2}{(A/t)^2 B^2}(k+s)^2 + \ldots\right) e^{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}t\sigma\right)} =$$

$$= cA^s B^k t^{-s} l_s k^{2k} \exp\left\{\frac{\gamma t}{AB}\,(k+s)\right\} \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}\,t\sigma\right)\right\} \leq$$

$$\leq cA_1^s B_1^k t^{-s} l_s k^{2k} e^{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}\,t\sigma\right)}, \quad A_1 = Ae^{\gamma T/(AB)}, \quad B_1 = Be^{\gamma T/(AB)}.$$

Оскільки

$$e^{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}\,t\sigma\right)} = \gamma\left(\frac{a}{2}\,t\sigma\right) \leq c_0 e^{-c_0' t|\sigma|}, \quad \tilde{\gamma} = 1/\gamma, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то

$$|x^k D_x^s G(t,x)| \leq (2\pi)^{-1} cc_0 A_1^s B_1^k t^{-s} l_s k^{2k} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-c_0' t|\sigma|\} d\sigma = \tilde{c} A_1^s B_1^k t^{-(s+1)} l_s k^{2k},\ \{k,\,s\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^s G(t,x)| \leq \tilde{c} A_1^s t^{-(s+1)} l_s \inf_k \frac{B_1^k k^{2k}}{|x|^k} \leq \tilde{\tilde{c}} A_1^s t^{-(s+1)} l_s e^{-\alpha_0 |x|^{1/2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,T^*],$$

сталі $\tilde{\tilde{c}}$, A_1, $\alpha_0 > 0$ не залежать від t; тут ми скористалися нерівністю з [1]:

$$\inf_k \frac{L^k k^{k\alpha}}{|x|^k} \leq d \exp\{-d_0 |x|^{1/\alpha}\}, \quad d, d_0, \alpha > 0.$$

Таким чином, правильним є таке твердження.

Лема 3. *Для функції* $G(t,x)$, $t \in (0,T^*]$, $x \in \mathbb{R}$ *та її похідних* (*за змінною* x) *справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq \tilde{\tilde{c}} A_1^s t^{-(s+1)} l_s e^{-\alpha_0 |x|^{1/2}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $\tilde{\tilde{c}}$, $A_1, \alpha_0 > 0$ *не залежать від* t.

Безпосередньо переконуємося в тому, що $G(t,\, x)$ є неперервно диференційовною функцією аргументу $t \in (0,\, T]$.

Лема 4. *Функція* $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями у просторі* $S_{l_k}^{a_n}$, *диференційовна по* t.

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення леми досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $F[S_{a_k}^{l_n}] = S_{l_k}^{a_n}$, диференційовна по t, тобто потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\,\sigma)\right] \to \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\,\sigma), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^s(\varphi(\sigma) Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s s^{2s} e^{-\ln \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}$, $\bar{a}$, $\overline{B} > 0$ не залежать від $\triangle t$, для досить малих значень $\triangle t$.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in (0,T] \times \mathbb{R}$, є диференційовною по t у звичайному розумінні, тому за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = \varphi(\sigma) Q(t+\theta\Delta t,\sigma), \quad 0 < \theta < 1, \quad t + \theta\Delta t \leq T.$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l \varphi(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma)$$

і

$$D_\sigma^s \left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l \varphi(\sigma) \left[D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l} Q(t,\sigma)\right].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l} Q(t,\sigma) = D_\sigma^{s-l+1} Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (18) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1} Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^s \left(\dfrac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right)$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1 виконується.

Оскільки φ — мультиплікатор у просторі $S_{l_k}^{n!\rho_n}$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, c_\varepsilon > 0\, \forall\, z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \le c_\varepsilon e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) + \ln\rho(\varepsilon\tau)}. \tag{20}$$

Згідно з інтегральною формулою Коші маємо

$$\varphi^{(n)}(\sigma) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-\sigma)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Тоді внаслідок (20) прийдемо до нерівностей

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \le \frac{n!}{R^n} \max_{z\in\Gamma_R} |\varphi(z)| \le c_\varepsilon \frac{n!}{R^n} e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R)) + \ln\rho(\varepsilon R)} \le$$

$$\le c_\varepsilon n! \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^n} e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))} = c_\varepsilon \varepsilon^n n! \rho_n e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))}, \quad \sigma \ge 0.$$

При достатньо великих значеннях $\sigma \ge 0$ справджується нерівність $\varepsilon(\sigma + R) \le (\varepsilon + R)\sigma$. Оскільки функція $\ln\tilde{\gamma}$ монотонно зростає для $\sigma \ge 0$, то при цих же значеннях $\sigma \ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \le \ln\tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma)$. Для всіх $\sigma \ge 0$ виконується нерівність $\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \le \ln\tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma) + c_R$. Отже, для $\sigma \ge 0$

$$\exp\{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R))\} \le \tilde{c}_R \exp\{\ln\tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma)\}.$$

Далі при заданому $\varepsilon > 0$ вважатимемо, що $R = \varepsilon$. Тоді

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \le \tilde{c}_\varepsilon \varepsilon^n n! \rho_n e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)} \le \tilde{c}'_\varepsilon \varepsilon^n n! e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{21}$$

(тут враховано, що послідовність $\{\rho_n\}$ є монотонно спадною). Врахувавши (21) та оцінки, які задовольняють похідні функції $Q(t, \sigma)$, знайдемо

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \tilde{\tilde{c}}_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C_s^l \varepsilon^l l! \widetilde{B}^{s-l} (s-l)^{2(s-l)} e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - (t+\theta\Delta t)\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le$$

$$\le \bar{c}\overline{B}^s s^{2s} e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le \bar{c}\overline{B}^s s^{2s} e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - \ln\tilde{\gamma}(at\sigma)}$$

(вважаємо, що $t + \theta\Delta t > 0,\ t \in (0, 1]$ є фіксованим). Візьмемо $\varepsilon = at/4$. Із нерівності опуклості для функції $\ln\tilde{\gamma}$ випливає, що

$$\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - \ln\tilde{\gamma}(at\sigma) \le -\ln\tilde{\gamma}((at - 2\varepsilon)\sigma) \equiv -\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma), \quad \bar{a} = at - 2\varepsilon = at/2 > 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\overline{B}^s s^{2s} e^{-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)}, \quad \sigma \ge 0,$$

причому сталі $\bar{c}$, $\bar{a}$, $\overline{B} > 0$ не залежать від Δt (для достатньо малих значень Δt). Випадок $\sigma < 0$ розглядається аналогічно. Таким чином, умова 2 також виконується.

Лему доведено.

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(f * G(t,\, x)) \,=\, f * \frac{\partial G(t,\, x)}{\partial t} \quad \forall f \,\in\, (S_{a_k}^{l_n})', \quad t \,\in\, (0, T].$$

Лема 5. *У просторі* $(S_{a_k}^{l_n})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t, \cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} G(t, \cdot) \,=\, \delta \tag{22}$$

(*тут* δ — *дельта-функція Дірака*).

Доведення. Використавши властивість неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t, \cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі $S_{a_k}^{l_n}$, співвідношення (22) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t \to +0} F[G(t, \cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} F[G(t, \cdot)] \,=\, F[\sigma] \tag{23}$$

у просторі $(S_{l_k}^{a_n})'$. Врахувавши зображення функції G, (23) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t, \cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} Q(t, \cdot) \,=\, 1. \tag{24}$$

Для доведення (24) візьмемо довільну функцію $\varphi \,\in\, S_{l_k}^{a_n}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle Q(t, \cdot), \varphi \rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} \langle Q(t, \cdot), \varphi \rangle \,=$$

$$= \mu \lim_{t \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma \,=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\mu Q(0, \sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q(t_l, \sigma) \right] \varphi(\sigma) d\sigma \,=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l, \sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} \right] \varphi(\sigma) d\sigma \,=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l, \sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} \, \varphi(\sigma) d\sigma \,=\, \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma) d\sigma \,=\, \langle 1, \varphi \rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (24) виконується у просторі $(S_{l_k}^{a_n})'$, а отже, правильним є співвідношення (22).

Лему доведено.

Символом $(S_{a_k,*}^{l_n})'$ позначатимемо клас узагальнених функцій з $(S_{a_k}^{l_n})'$, які є згортувачами у просторі $S_{a_k}^{l_n}$.

Наслідок 3. *Нехай* $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* $f \in (S_{a_k,*}^{l_n})'$. *Тоді у просторі* $(S_{a_k}^{l_n})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f.$$

Функція G є розв'язком рівняння (10). Справді,

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$A_\varphi G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma) F_{x\to\sigma}[G(t,x)]] = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

Звідси випливає, що функція G задовольняє рівняння (10).

Далі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m-точкової) нелокальної за часом задачі для рівняння (10).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (10) m-точкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], S_{a_k}^{l_n})$ рівняння (10), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in (S_{a_k,*}^{l_n})', \tag{25}$$

де граничне співвідношення (25) розглядається у просторі $(S_{a_k}^{l_n})'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m, t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (10), (11)).

Теорема 2. *Задача (10), (25) коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* G — *фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (10).*

Доведення. Використовуючи наслідок 2, переконуємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (10). Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in$ $\in (S_{a_k,*}^{l_n})'$, оскільки операція згортки має властивість неперервності.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (10), (25). Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A_\varphi^* v, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \quad 0 \le t < t_0 \le T, \tag{26}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (S_{a_k,*}^{l_n})', \tag{27}$$

де A_φ^* — звуження спряженого оператора до оператора A_φ на простір $S_{a_k}^{l_n} \subset (S_{a_k}^{l_n})'$. Умову (27) розуміємо в слабкому сенсі. Із результатів, отриманих в [4] (розділ 2), випливає, що в цьому випадку $A_\varphi^* = A_\varphi$, задача Коші (26), (27) є розв'язною; при цьому $v(t,\cdot) \in S_{k!\rho_k}^{l_n} \subset$ $\subset S_{a_k}^{l_n}$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t : (S_{a_k,*}^{l_n})' \to S_{a_k}^{l_n}$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{a_k,*}^{l_n})'$ розв'язок задачі (26), (27). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, визначеним для довільних t і t_0 таких, що $0 \leq t < t_0 \leq T$; при цьому

$$\frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} + A_\psi^* Q_{t_0}^t \psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі $(S_{a_k}^{l_n})'$).

Далі розв'язок $u(t,x)$ задачі (10), (25) розумітимемо як регулярний функціонал із простору $(S_{a_k,*}^{l_n})' \supset S_{a_k}^{l_n}$.

Доведемо, що задача (10), (25) має єдиний розв'язок у просторі $(S_{a_k,*}^{l_n})'$. Для цього досить встановити, що єдиним розв'язком рівняння (10) при нульовій граничній функції може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q_{t_0}^t \psi \in S_{a_k}^{l_n} \subset (S_{a_k,*}^{l_n})'$, де ψ — довільно фіксований елемент простору $S_{a_k}^{l_n} \subset (S_{a_k,*}^{l_n})'$, $0 < t < t_0 \leq T$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (10), (26), знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} Q_{t_0}^t \psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle - \left\langle u, A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi \right\rangle = \left\langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle - \left\langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle = 0.$$

Отже, $\left\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \right\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \left\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \right\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = \text{const} = c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Якщо в (25) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle = c \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного елемента $\psi \in S_{a_k}^{l_n} \subset (S_{a_k,*}^{l_n})'$, тобто $u(t_0,\cdot)$ — нульовий функціонал із простору $(S_{a_k,*}^{l_n})'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Теорему доведено.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 307 с.
2. *Городецький В.В., Мартинюк О. В.* Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь із операторами узагальненого диференціювання // Доп. НАН України. — 2013. — № 3. — С. 7 – 13.
3. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — Київ: Наук. думка, 2002. — 416 с.
4. *Городецький В. В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. — Чернівці: Рута, 2005. — 291 с.

Одержано 28.05.13,
після доопрацювання — 19.12.14