

## О ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ И БИФУРКАЦИЯХ В ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

**А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина**

*Ин-т механики НАН Украины*

*Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3*

*e-mail: center@inmech.kiev.ua*

*We give geometric conditions for a three-dimensional nonlinear system to have a closed trajectory with symmetry. An oscillator with quadratic nonlinearity and a Chua circuit are considered as examples.*

*Наведено геометричні ознаки існування замкненої траєкторії з симетрією у тривимірних нелінійних системах. Як приклад розглянуто генератор із квадратичною нелінійністю та ланцюг Чуа.*

**1. Исходные результаты. Постановка задачи.** Колебания и устойчивость нелинейных многомерных систем имеют приложения в задачах механики [1] и радиофизики [2]. Вопрос существования периодического решения в трехмерной автономной системе изучен в работе [3] с применением сформулированного ранее принципа тора. В данной статье рассматриваются трехмерные системы, имеющие определенную форму симметрии. Это облегчает решение задачи, которая состоит в установлении существования замкнутой интегральной кривой. Динамика трехмерных нелинейных систем связана с бифуркационными процессами и появлением как периодического движения, так и странного аттрактора (см. [2, 4–6] и приведенную там библиографию).

Исходными результатами при решении поставленной задачи будут следующие:

- 1) метод установления бифуркационных процессов;
- 2) принцип симметрии для двумерных систем;
- 3) применение принципа сравнения для подтверждения неустойчивости решений исходной системы в окрестности нуля.

Исследование бифуркаций, которые являются причиной изменения качества поведения системы, можно осуществить с помощью уравнений в вариациях [6]. В данной работе уравнения в вариациях отличаются от известных тем, что коэффициенты уравнений зависят не от времени, а от частных решений системы дифференциальных уравнений [7]. Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(x, p), \quad x(t) \in R^n, \quad p \in R^m, \quad (1)$$

где  $n = 3$ ,  $F(x, p)$  — гладкая функция,  $R^m$  — пространство параметров. Введем в рассмотрение малое отклонение в окрестности частных решений  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :  $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ . Рассмотрим  $\delta x_i$  в качестве новых координат. Линейная система, соответствующая системе (1) в координатах  $\delta x_i$ ,

$$\frac{d\delta x}{dt} = \mathcal{A}(\bar{x})\delta x, \quad \delta x \in R^n,$$

где  $\mathcal{A}(\bar{x}) = \partial F / \partial x|_{x=\bar{x}}$ , называется *системой в вариациях*. С помощью анализа корней характеристического уравнения матрицы  $\mathcal{A}(\bar{x})$  можно, например, строить сепаратрисы, получить оценки параметров орбитально устойчивой системы [7].

В аналитически заданных системах обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $dx/dt = \mathcal{A}(t)x$  введем характеристические показатели нетривиальных решений

$$\Lambda_j = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [t^{-1} \ln \|x_j(t)\|], \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $x_j(t)$  —  $j$ -е фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма. Числа  $\Lambda_j$  называются обобщенными характеристическими показателями системы (1). Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений  $\delta x$  вблизи частного решения  $\bar{x}(t)$  нелинейной системы (1), совокупность  $\Lambda_j$  называют характеристическими показателями Ляпунова (ХПЛ) частного решения  $\bar{x}(t)$  (или фазовой траектории).

Существование периодических движений в двумерных системах было установлено с помощью симметрии и изложено в работе [8]. Расширение принципа симметрии в виде принципа кососимметрии получило применение в работе [7]. В качестве исходных результатов, приведем некоторые сведения о принципе симметрии [8]. Запишем двумерную систему в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x),$$

где  $x_1, x_2 \in R$ ,  $F_1 \in C(R^2, R)$ ,  $F_2 \in C(R^2, R)$  и  $F_i(0, 0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории относительно центра, формулируется так [8]: *в двумерной системе существует симметрия траектории, если выполняются условия четности функции  $F_1(x)$  относительно  $x_1$  и нечетности функции  $F_2(x)$  относительно  $x_1$ , т. е.*

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2).$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости  $Ox_1x_2$  ось  $Ox_2$  является осью симметрии и любая интегральная кривая слева от оси  $Ox_2$  является зеркальным отображением кривой справа. На основе принципа симметрии можно заключить, что *в системе существует симметрия траектории, если выполняются условия четности функции  $F_2(x)$  относительно  $x_2$  и нечетности  $F_1(x)$  относительно  $x_2$ , т. е.*

$$F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2), \quad F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2).$$

Достаточно предположить, что интегральная кривая, начинаясь на оси  $Ox_1$ , при дальнейшем продолжении вновь приходит на ось  $Ox_1$ . Здесь ось  $Ox_1$  является осью симметрии.

Условия кососимметрии для двумерной системы [7] имеют вид

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2), \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (2)$$

С помощью условий кососимметрии также можно установить существование замкнутой интегральной кривой в случае нелинейного осциллятора с неустойчивой особой точкой (неустойчивый фокус). В случае устойчивого фокуса траектория, имея тенденцию к

косой симметрии, приходит в особую точку. В обоих случаях выполняются условия (2). Если в двумерной нелинейной системе вида (1) особая точка в нуле является седлом и в системе имеются две кососимметричные особые устойчивые точки, то выполнение условий (2) устанавливает существование двух ветвей кососимметричных траекторий, исходящих из нуля. Более подробно приложение принципа кососимметрии рассмотрено ниже в задаче Чуа.

Теоремы о симметрии и кососимметрии трехмерной системы доказываются в предположении о неустойчивости трехмерной системы. Этот результат может быть получен с помощью, например, метода сравнения [9–11]. Метод сравнения включает составление уравнений сравнения (уравнений вида Важевского), которые имеют свойство квазимонотонности. В работах [9, 10] и обзоре [11] приведены основные источники и результаты по исследованию устойчивости монотонных систем. *Ключевым утверждением метода сравнения является следующее: если для исследуемой системы существует функция Ляпунова, удовлетворяющая подходящим условиям, то различные динамические свойства исходной системы следуют из соответствующих динамических свойств системы сравнения [11].*

Рассмотрим систему

$$\frac{d\vartheta_j}{dt} = q_j(\vartheta_1, \dots, \vartheta_k), \quad j = 1, \dots, k, \quad (3)$$

при следующих предположениях.

1. Система (3) является системой Важевского, т. е. компоненты вектор-функции  $q(\vartheta)$  являются квазимоноotonно возрастающими функциями. Для квазимонотонного возрастания функции  $q(\vartheta)$  необходимо и достаточно выполнения условий  $\partial q_j / \partial \vartheta_i \geq 0$  при  $j \neq i$ .

2. Правая часть системы (3) непрерывна и решение задачи Коши для любого  $\vartheta_0 \in \mathcal{R}^k$  локально единственно.

*Теорема о неустойчивости системы Важевского в конусе  $\mathcal{K}$*  (см. [9, 11]). Если для системы Важевского выполняются предположения 1, 2, существует последовательность  $\vartheta_m \in \mathcal{K}$ ,  $\vartheta_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , такая, что для каждого  $m$  выполняются неравенства

$$q_j(\vartheta_m) \geq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4)$$

причем хотя бы для одного  $j$  неравенство является строгим, и найдется окрестность нуля  $V$  такая, что на множестве  $\mathcal{K}_{\vartheta_m} \cap V$  векторное поле не равно нулю, то нулевое решение системы (3) неустойчиво в конусе.

Ограничим применение теоремы сравнения пунктами 1, 2 и неравенством (4). Для установления существования периодического решения необходимо, чтобы выходящая из нуля траектория замкнулась вследствие определенных качеств симметрии.

**2. Теорема о принципе симметрии для трехмерной системы.** Принцип симметрии в трехмерных системах состоит в нахождении координатной плоскости, на которую пространственная интегральная кривая проецируется в замкнутую симметричную кривую. На двух других координатных плоскостях процесс устойчив и может сопровождаться симметрией.

Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = -xz + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m + f(x)), \quad (5)$$

где  $m, b$  — положительные параметры. Будем предполагать, что функция  $f(x)$  определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений в каждой точке  $x$ . Считаем, что  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в окрестности нуля. Предположим, что замкнутая траектория лежит на поверхности и имеет определенный вид симметрии. Можно найти плоскость, на которую траектория проецируется в замкнутую кривую. Замкнутая траектория имеет определенные проекции на две другие плоскости. Последние две проекции на координатные плоскости могут иметь симметрию, но не обязательно замыкание. Еще одно предположение касается неустойчивости системы (5) в окрестности нуля. Поскольку двумерные проекции доступны прогнозированию геометрической симметрии и устойчивости, все приведенное выше можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Рассмотрим систему (5) при следующих предположениях:*

- 1) *система (5) имеет неустойчивое решение в окрестности нуля;*
- 2) *движение на плоскости  $Oxz$  системы (5) определяется системой*

$$\frac{dx}{dt} = -xz, \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m + f(x)), \quad (6)$$

*которая содержит два устойчивых положения равновесия.*

*Тогда в трехмерной системе (5) существует замкнутая интегральная кривая.*

**Доказательство.** Движение на плоскости  $Oxy$  уравнений (5) определяется системой

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad (7)$$

которая имеет симметричную замкнутую траекторию: особая точка — центр, траектория на плоскости имеет симметрию относительно осей  $Ox, Oy$ . Движение на плоскости  $Oyz$  уравнений (5) определяется системой

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m). \quad (8)$$

Особая точка системы (8) имеет показатели характеристического уравнения  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b$ . Пусть начальные условия системы (5) возбуждают образование замкнутой симметричной траектории системы (7). Тогда возмущается система (6), образуются траектории, стремящиеся к особым точкам с координатами  $(\pm x_0, z_0)$ . Колебания системы (5) принимают вид установившегося процесса, который характеризуется интегральной кривой с симметрией в пространстве  $Oxyz$ . При этом проекция системы (8) на плоскость  $Oyz$  этому установившемуся процессу не противодействует.

Теорема доказана.

Предлагаемая теорема имеет геометрический характер. Рассматривается механизм образования периодической трехмерной кривой с симметрией. При анализе движений на координатных плоскостях основная составляющая — нахождение плоскости, на которой образуется симметричная по двум осям замкнутая кривая (плоскость  $Oxy$ ). Две остальные координатные плоскости стабилизируют качественную картину и симметрию в случае устойчивости особых точек систем (6), (8).

**Приложение теоремы 1.** *О замыкании траектории генератора с квадратичной нелинейностью.* Рассмотрим генератор с квадратичной инерционной нелинейностью в виде безразмерной системы, приведенной в [2]:

$$\frac{dX}{dt} = mX - XZ + Y, \quad \frac{dY}{dt} = -X, \quad \frac{dZ}{dt} = -b(Z - X^2). \quad (9)$$

Система (9) имеет одну особую точку  $O(0, 0, 0)$ . Введем малые отклонения  $\delta X, \delta Y, \delta Z$  в системе (9) от частных решений  $\bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t)$  и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta X}{dt} = (m - \bar{Z})\delta X + \delta Y - \bar{X}\delta Z, \quad \frac{d\delta Y}{dt} = -\delta X, \quad \frac{d\delta Z}{dt} = -b(\delta Z - 2\bar{X}\delta X). \quad (10)$$

Характеристическое уравнение системы (10) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(b - m + \bar{Z}) + \lambda(b(-m + \bar{Z} + 2\bar{X}^2) + 1) + b = 0. \quad (11)$$

Корни, соответствующие особой точке  $O(0, 0, 0)$  системы (9), находятся из уравнения  $\lambda^3 + \lambda^2(b - m) + \lambda(-bm + 1) + b = 0$  либо  $(\lambda + b)(\lambda^2 - \lambda m + 1) = 0$  и равны  $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ . Точка  $O$  имеет тип седло-фокус при значениях параметра  $(m/2)^2 < 1$ .

Покажем, что на оси  $OZ$  существуют точки, которым соответствует разделение характеристического уравнения вида (10) на два. В точке  $A(X = 0, Y = 0, Z = m + b)$  характеристическое уравнение имеет вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 + b\lambda + 1) = 0$ . Значения характеристических показателей таковы:  $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ . В точке  $C(X = 0, Y = 0, Z = m)$  характеристическое уравнение имеет вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 + 1) = 0$  и значения характеристических показателей в этой точке  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ,  $\lambda_3 = -b$ . В точке  $D(X = 0, Y = 0, Z = -m)$  характеристическое уравнение имеют вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 - 2m\lambda + 1) = 0$ . Значения характеристических показателей в этой точке  $\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ .

Таким образом, в точке  $C$  происходит смена знака действительной части двух комплексно-сопряженных корней. В характеристическое уравнение (11) входят частные решения  $\bar{X}, \bar{Z}$ . Плоскость  $OXZ$  является координатной плоскостью, которая определяет бифуркационные процессы системы (9).

Применим метод сравнения для доказательства неустойчивости системы (9). Введем функции  $V_1 = X^2/2$ ,  $V_2 = Y^2/2$ ,  $V_3 = X^2/2 + Z^2/2$ . Производные функций  $V_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , в силу системы (9) допускают оценки

$$\frac{dV_1}{dt} = mX^2 - X^2Z + XY \leq mX^2 + \frac{Y^2}{2} + \frac{X^2}{2} + \frac{Z^2}{2} + \frac{X^4}{2},$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -XY \leq \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2},$$

$$\frac{dV_3}{dt} = bX^2Z + mX^2 - X^2Z + XY - bZ^2 \leq \left(m + \frac{b}{2}\right) \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + \frac{(1-b)(X^2 + Z^2)}{2} + \frac{(1+b)X^4}{2}.$$

Здесь производные двух переменных заменены на сумму

$$\pm bX^2Z \leq \frac{bX^4}{2} + \frac{bZ^2}{2}, \quad \pm XY \leq \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2}, \quad \pm X^2Z \leq \frac{X^4}{2} + \frac{Z^2}{2}.$$

Запишем систему сравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_1}{dt} &= 2m\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + 2\vartheta_1^2, \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \vartheta_1 + \vartheta_2, \\ \frac{d\vartheta_3}{dt} &= (2m + b)\vartheta_1 + \vartheta_2 + (1 - b)\vartheta_3 + 2(1 + b)\vartheta_1^2.\end{aligned}\tag{12}$$

При выполнении условия  $b \leq 1$  система сравнения (12) показывает, что траектория уходит от нуля. Зададим следующие значения параметров:  $(m, b) = (1; 0, 2)$ .

Перенесем начало координат в точку  $C$ . Введем новую систему координат  $Cxyz$ , где  $x = X, y = Y, z = Z - m$ , тогда система (9) примет вид системы (5)

$$\frac{dx}{dt} = -xz + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m - x^2).\tag{13}$$

Рассмотрим движение траектории системы (13) на плоскости  $Cxz$ , которая определяется системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -xz, \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m - x^2).\tag{14}$$

Найдем особые точки системы (14). Примем  $z = 0$ . Система (14) имеет две особые точки, координаты которых  $x = \pm\sqrt{m}, z = 0$ . Особые точки  $C_1(\sqrt{m}, 0), C_2(-\sqrt{m}, 0)$  имеют характеристические показатели  $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8m/b})$ . Появление замкнутой траектории в системе (13) связано с начальным возмущением по переменной  $x$ , которое вызывает возмущение переменной  $y$ . Поскольку все предполагаемые условия теоремы 1 удовлетворяются, можно утверждать о существовании замкнутой кривой в системе (13).

На рисунке 1,  $a, б$  приведены объемное изображение траектории системы (13) и проекция на плоскость  $Cxy$ . Начальное возмущение  $x(0) = 0, 01$ .

Рассмотрим второй вариант определения особой точки в уравнениях (14). Примем  $x = 0$ , тогда особая точка имеет координаты  $x = 0, z = -m$ . При начальном возмущении только по переменной  $z$  в системе (5) не рождается замкнутая траектория, так как проекция на плоскость  $Cxy$  системы (13) является точкой вследствие отсутствия возбуждения системы относительно переменных  $x, y$ .

**3. Системы с кососимметрией.** Для плоской (двумерной) системы принцип кососимметрии обсуждался в работе [7]. Нелинейная система вида (1) на плоскости  $Ox_1x_2$  вида  $\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2), \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2)$  имеет кососимметрию траектории, если выполняются условия (2).

Относительно трехмерной системы (1) сделаем следующие предположения.

**Предположение 1.** Система (1) имеет три особые точки. Особая точка  $O(0, 0, 0)$  — седло-фокус с нулевой седловой величиной.

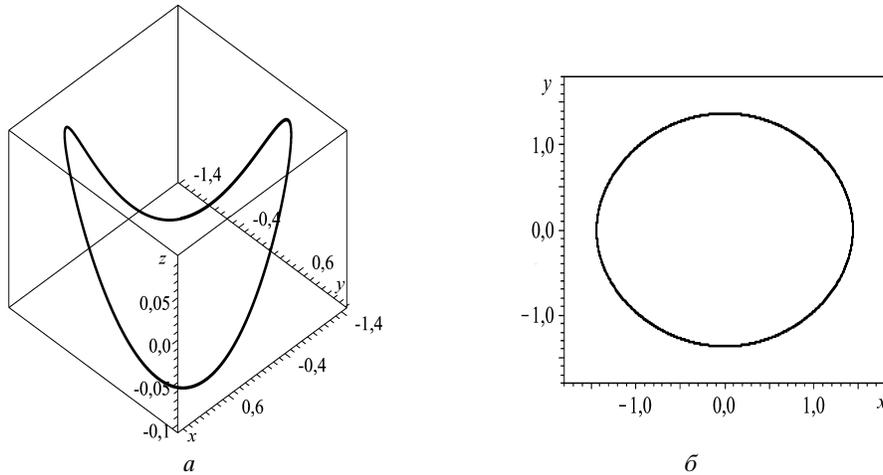


Рис. 1

**Предположение 2.** Правая часть системы (1) удовлетворяет условиям кососимметрии вида (10) в трех координатных плоскостях  $Ox_1x_2$ ,  $Ox_1x_3$ ,  $Ox_2x_3$ .

**Предположение 3.** На одной из координатных плоскостей система вида (1) имеет круговую диссипативную кривую, а на двух других плоскостях — особые ненулевые устойчивые точки.

**Теорема 2.** Пусть для дифференциальной системы (1) справедливы условия предположений 1–3. Тогда в окрестности трех особых точек системы (1) существует замкнутая интегральная кривая.

**Доказательство.** Физический аспект доказательства имеется в работе [12]. В [12] показано, что если траектория консервативной системы удовлетворяет условию симметрии (кососимметрии вида (2)), то существует замкнутая траектория. Условия вида (2) должны выполняться двумерными системами на каждой координатной плоскости. На одной координатной плоскости должна быть круговая траектория. Для возникновения предельного цикла должно реализоваться ограничение на уход траектории от окрестности нуля. Это ограничение осуществляется наличием устойчивых особых точек на координатных плоскостях. Седло-фокусная особая точка  $O(0, 0, 0)$  с нулевой седловой величиной участвует в создании кососимметрии траектории. Условия вида (2) вызывают не только замыкание, но и кососимметрию проекций.

Теорема доказана.

**Приложение теоремы 2.** О замыкании траектории и бифуркационных процессах в системе Чуа. Рассмотрим систему дифференциальных нелинейных уравнений Чуа [6, 13, 14]

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y), \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -\beta y, \quad (15)$$

где  $a, b, \alpha, \beta$  — положительные параметры. Докажем существование в системе (15) кососимметричного предельного цикла. Система (15) имеет три состояния равновесия: особая точка  $O(0, 0, 0)$ , особые точки  $A(x_A = \sqrt{a/b}, y_A = 0, z_A = -\sqrt{a/b})$ ,  $B(x_B = -\sqrt{a/b}, y_B = 0, z_B = -\sqrt{a/b})$ .

$y_B = 0$ ,  $z_B = \sqrt{a/b}$ ). Введем малые отклонения  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  от частных решений  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  системы (15) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y), \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x - \delta y + \delta z, \quad \frac{d\delta z}{dt} = -\beta\delta y.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе в вариациях, имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(-a + 3b\bar{x}^2)) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a - 3b\bar{x}^2)) + \alpha\beta(-a + 3b\bar{x}^2) = 0. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение (16) зависит лишь от частного решения  $\bar{x}$ . Характеристические показатели точки  $O$  определяются на основе уравнения  $\lambda^3 + \lambda^2(1 - \alpha a) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a)) - \alpha\beta a = 0$ .

Рассмотрим движение относительно особой точки  $O$ . Траектория системы (15) имеет на плоскости  $Oxy$  кривую, заданную уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y), \quad \frac{dy}{dt} = x - y. \quad (17)$$

Особые точки системы (17) следующие:

$$O_1(0, 0), \quad E(\sqrt{(a+1)/b}, \sqrt{(a+1)/b}), \quad F(-\sqrt{(a+1)/b}, -\sqrt{(a+1)/b}).$$

Для системы (17) уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y), \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x - \delta y$$

имеют характеристическое уравнение

$$(\lambda + 1)(\lambda - \alpha(a - 3b\bar{x}^2)) - \alpha = 0. \quad (18)$$

Характеристические показатели особой точки  $O_1$  вычисляются согласно выражению

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 + \alpha a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 + \alpha a}{2}\right)^2 + \alpha(a + 1)}.$$

Примем такие параметры, чтобы

$$\alpha a = 1, \quad (19)$$

тогда  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1 + \alpha}$  и точка  $O_1$  — седло. Подставим в характеристическое уравнение (18) координату  $x$  точек  $E$ ,  $F$ . Характеристические показатели точек  $E$ ,  $F$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3(1 + \alpha)}{2} \pm \sqrt{\frac{9(1 + \alpha)^2}{4} - 2(1 + \alpha)}. \quad (20)$$

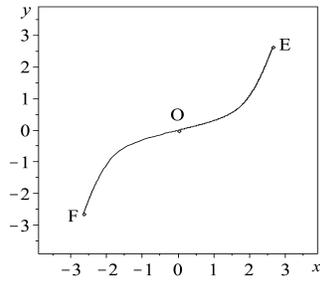


Рис. 2

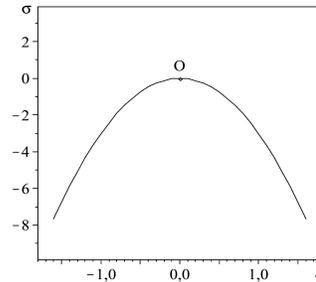


Рис. 3

На плоскости  $Oyz$  движение изображающей точки подчинено уравнениям

$$\frac{dy}{dt} = -y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -\beta y. \quad (21)$$

Система (21) представляет линейный диссипативный осциллятор

$$\ddot{z} + \dot{z} + \beta z = 0$$

и удовлетворяет условиям (2). Особая точка  $O_2$  системы (21) — устойчивый фокус. На плоскости  $Oxz$  изображающая точка движется согласно уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3), \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Особая точка  $O_3$  имеет характеристические показатели  $\lambda_1 = \alpha a$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Координаты особых точек  $G$ ,  $H$  таковы:  $x = \pm\sqrt{a/b}$ ,  $z = 0$ . Точки  $G$ ,  $H$  имеют характеристические показатели  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Уравнения формально удовлетворяют условиям (2).

Зададим такие значения параметров:

$$(a, b, \alpha, \beta) = (1/6, 1/6, 6, 7). \quad (22)$$

При выборе параметров (22) учитываются следующие условия:

- а) условие (19);
- б) особые точки  $E$ ,  $F$  системы (17) определяются как устойчивые узлы (согласно формуле (20)); точки  $E$ ,  $F$  изображены на рис. 2;
- в) в седло-фокусной точке  $O$  седловая величина, согласно характеристическому уравнению (16), равна нулю:  $\sigma = 2\operatorname{Re} \lambda_{1,2} + \lambda_3 = 0$ .

Начальные условия заданы согласно следующим оценкам:

$$|x(0)| > |x_A|, \quad |y(0)| \geq 0, \quad |z(0)| > |z_A|. \quad (23)$$

При этих условиях кривая замыкается относительно особых точек  $O$ ,  $A$ ,  $B$ . Выбор начальных условий (23) можно уточнить численным способом (в рамках неравенств (23)).

Рассмотрим интервал значений параметра  $\beta$ :

$$7 < \beta < 10, 1 \quad (24)$$

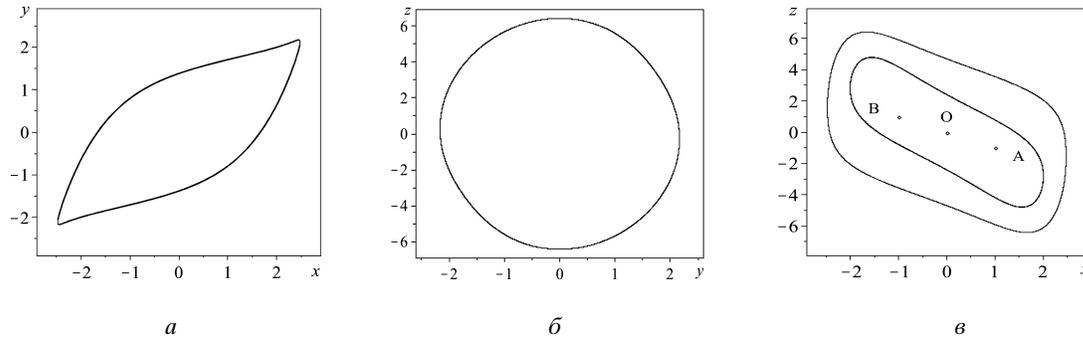


Рис. 4

(остальные параметры соответствуют (22)). Бифуркационный процесс в системе (15) управляется одной переменной  $x$ . Кривая  $\sigma(x)$ , построенная на основе характеристического уравнения (16), определяет зависимость седловой величины от координаты —  $\sigma(x)$ . Например, в седло-фокусных точках  $A, B$  седловая величина отрицательна, т. е.  $\sigma = 2 \operatorname{Re} \lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$  в интервале значений (24) параметра  $\beta$ . Седловая величина отрицательна во всех точках, кроме точки  $O$  (см. рис. 3,  $\beta = 8, 7$ ).

Пусть выполняются условия на начальные возмущения вида (23). Решения системы Чуа образуют замкнутые кососимметричные интегральные кривые в диапазоне параметра  $\beta$  (24). На рис. 4 изображены три замкнутые кривые системы (15) в проекциях на координатные плоскости. В плоском сечении координат  $xz$  внешняя замкнутая кривая соответствует  $\beta = 7$  и следующим начальным возмущениям:  $x(0) = -1, 7; y(0) = 0, 2; z(0) = -1, 7$ . Внутренняя кривая соответствует  $\beta = 10, 1$ ; начальные условия имеют вид  $x(0) = -2, 9; y(0) = 0, 8; z(0) = -2, 9$ . В особой седло-фокусной точке  $O$  седловая величина равна нулю, т. е.  $\sigma = 2 \operatorname{Re} \lambda_{1,2} + \lambda_3 = 0$  в интервале значений (24) параметра  $\beta$ . Остальные параметры соответствуют (22).

Рассмотрим решения системы Чуа, обусловленные особыми точками  $A, B$ . Точки  $A, B$  кососимметричны. Свяжем с точкой  $A$  систему координат  $Avyw$ . Составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \left( -2av - bv^2 \left( 3\sqrt{\frac{a}{b}} + v \right) + y \right), \quad \frac{dy}{dt} = v - y + w, \quad \frac{dw}{dt} = -\beta y, \quad (25)$$

где  $v = x - \sqrt{a/b}, w = z + \sqrt{a/b}$ . Точки  $A, B$  могут организовывать замкнутые кривые, исключая точку  $O$ . Параметр  $\beta$  должен быть таким, чтобы траектории, замкнутые относительно  $A$  и  $B$ , не пересекались. Рассмотрим движение относительно одной особой точки. Введем малые отклонения  $\delta v, \delta y, \delta w$  от частных решений  $\bar{v}, \bar{y}, \bar{w}$  системы (25) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta v}{dt} = \alpha \left( -2a\delta v - 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v}\delta v - 3b\bar{v}^2\delta v + \delta y \right), \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta v - \delta y + \delta w, \quad \frac{d\delta w}{dt} = -\beta\delta y. \quad (26)$$

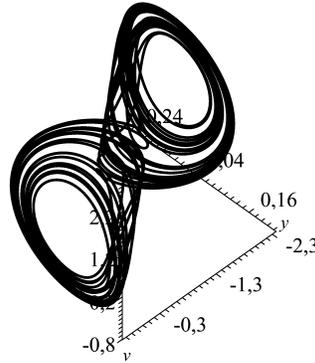


Рис. 5

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (26), имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left( 1 + \alpha \left( 2a + 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v} + 3b\bar{v}^2 \right) \right) + \lambda \left( \alpha \left( 2a + 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v} + 3b\bar{v}^2 - 1 \right) + \beta \right) + \alpha\beta \left( 2a + 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v} + 3b\bar{v}^2 \right) = 0.$$

В системе координат  $Avyw$  особая точка  $O$  имеет следующие координаты:  $v_O = -\sqrt{a/b}$ ,  $y_O = 0$ ,  $w_O = \sqrt{a/b}$ . При начальных возмущениях

$$|v(0)| < \sqrt{a/b}, \quad |y(0)| \geq 0, \quad |w(0)| < \sqrt{a/b} \quad (27)$$

в системе доминирует движение под влиянием особой точки  $A$  либо  $B$ . Оценки начальных условий (23) также могут уточняться численно. Введем начальные возмущения вида (27), которые включают влияние особых точек  $A, B$  при значениях параметра  $\beta$  (24). При значениях параметра  $\beta < 8,3$  в рамках интервала (24) система Чуа образует в окрестности точки  $A$  интегральную кривую, которая переходит в окрестность точки  $B$ . Переход из окрестности точки  $A$  в окрестность точки  $B$  означает орбитальную неустойчивость. При движении изображающей точки в окрестности точки  $A$  (либо  $B$ ) все точки траектории являются седло-фокусными с отрицательной седловой величиной. При переходе изображающей точки в окрестность  $B$  в сигнатуре спектра ХПЛ появляется знак плюс. Этот процесс при  $\beta = 8,3$  отражен в виде фрагмента на рис. 5 (начальные возмущения имеют вид  $v(0) = 0,2$ ;  $y(0) = 0$ ;  $w(0) = 0,2$ ). Дальнейшее увеличение параметра  $\beta$  приводит к возникновению двух предельных циклов. Переход к предельным циклам происходит через бифуркацию кратного увеличения периода. На рис. 6, *a* изображены два предельных цикла в системе координат  $Oxyz$  с начальными условиями:  $x(0) = 0,2$ ;  $y(0) = 0$ ;  $z(0) = -0,2$  (цикл относительно точки  $A$ );  $x(0) = -0,2$ ;  $y(0) = 0$ ;  $z(0) = 0,2$  (цикл относительно точки  $B$ ), значение параметра  $\beta = 9$ , на рис. 6, *б* — два предельных цикла с кратным (учетверенным) периодом ( $\beta = 8,7$ ) на координатной плоскости  $Oxz$ , а на рис. 6, *в* — их временная реализация  $x(t)$ .

В радиофизике термин „мультистабильность” указывает на сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов. Это обусловлено начальными возмущениями

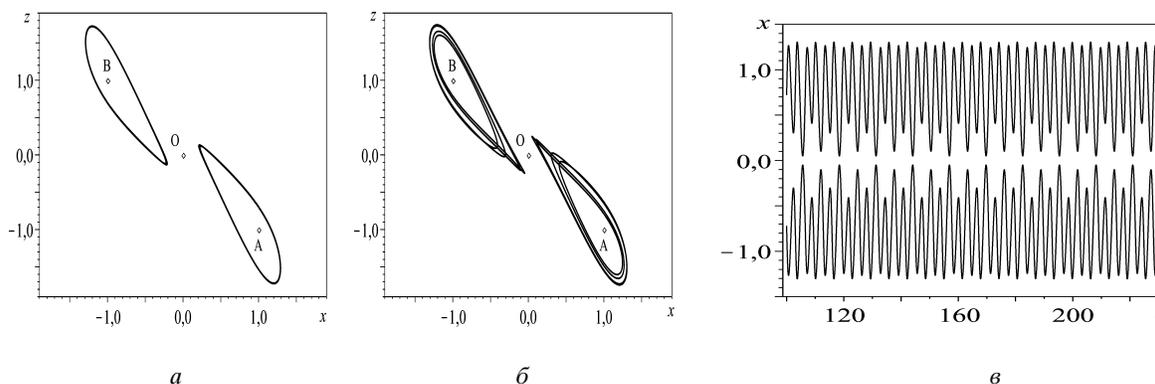


Рис. 6

ми. Мультистабильность в системе Чуа связана с влиянием определенной особой точки на поведение траектории. Влияние определяется оценками (23), (27) разных начальных условий. В пределах оценок  $8,3 < \beta < 9$  предельные циклы относительно точек  $A$ ,  $B$  претерпевают бифуркацию кратного увеличения периода. На рис. 6 траектория предельного цикла попадает в точку, где  $x \approx 0$ . Кривая резко меняет направление движения. Явление кратного увеличения периода связано с *неравномерностью движения изображающей точки*. Это происходит в непосредственной близости к точке  $O$ . Здесь седловая величина близка к нулю.

Образование двух предельных циклов без симметрии (см. рис. 6) связано с геометрической теоремой, которая доказывает, что все точки траектории являются притягивающими, седло-фокусными с отрицательной седловой величиной.

**Заключительные замечания.** Работа в целом посвящена классификации физических объектов, которые порождают многомерные аттракторы. Приведены две теоремы существования предельных циклов с симметрией в трехмерной системе.

Вторая теорема связана с кососимметрией проекций на координатные плоскости, которые порождают замыкание трехмерной траектории. В качестве одного из примеров рассмотрена математическая модель Чуа. Приведены условия, при которых система Чуа генерирует периодические сигналы. В случае одного предельного цикла (см. рис. 4) адаптирован принцип кососимметрии для трехмерных систем. Эта адаптация связана с теоремой 2. Приведенные значения параметров (22) образуют точку в пространстве параметров. В малой окрестности точки существует множество точек, которым соответствуют также предельные циклы. Установлена причина возникновения кратного периода предельных циклов. Описан механизм мультистабильности.

1. Пузырев В. Е. Асимптотическая устойчивость равномерных вращений симметричного гироскопа, несущего упруго закрепленный ротор // Механика твердого тела. — 2004. — Вып. 34. — С. 100–107.
2. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990. — 312 с.
3. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964. — 368 с.
4. Belhaq M., Lakrad F. Analytics of homoclinic bifurcations in three-dimensional systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2002. — **12**, № 11. — P. 2479–2486.
5. Leonov G. A. Strange attractors and classical stability theory. — St.Peterburg Univ. Press, 2008. — 160 p.
6. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. — М.: Ин-т компьютер. исслед., 2009. — Ч. 2. — 546 с.

7. *Никитина Н. В.* Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. — Киев: Феникс, 2012. — 235 с.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. — 550 с.
9. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Исследование устойчивости автономных систем сравнения. — Киев, 1978. — 44 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 78.28).
10. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. — 1980. — **16**, № 8. — С. 1392–1407.
11. *Martyniuk A. A.* Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (Review) // Int. Appl. Mech. — 2011. — **47**, № 5. — P. 475–534.
12. *Никитина Н. В.* Об условиях замыкания траектории в трехмерном пространстве // Доп. НАН України. — 2013. — № 7. — С. 72–77.
13. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V., Wu C. W., Chua L. O.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 1995. — **5**, № 6. — P. 1677–1699.
14. *Астахов В. В., Шабунин А. В., Сильченко А. Н., Стрелкова Г. И., Анищенко В. С.* Нелинейная динамика двух связанных через емкость генераторов Чуа // Радиотехника и электроника. — 1997. — **42**, № 3. — С. 320–327.

Получено 07.10.13