УДК 517.929

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. А. Бойчук, І. А. Головацька

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua
holovatska.iv@gmail.com

We obtain a necessary and a sufficient conditions for existence of a solution of a weakly nonlinear boundary-value problem for an integro-differential system. Using the methods of the theory of pseudoinverse matrices we obtain a necessary and a sufficient conditions for existence of a solution of a linear integro-differential system with impulsive effects at fixed times.

Получены необходимое и достаточное условия существования решения слабонелинейной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений. С помощью аппарата теории псевдообратных матриц получены необходимое и достаточное условия существования решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

1. Слабконелінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь. Умови існування розв'язків систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь та крайових задач для них, а також слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь вивчались у роботах [1–5]. Для таких систем розвинуто загальну теорію та розроблено ефективні методи знаходження розв'язків. У даній роботі за допомогою теорії псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць [1, 2, 6] досліджено умови існування та запропоновано ітераційні алгоритми побудови розв'язків крайових задач для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь та рівнянь з імпульсним впливом.

1.1. Постановка задачі та допоміжні результати. Розглянемо слабконелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\,ds = f(t) + \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds \tag{1}$$

з крайовою умовою

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Будемо шукати умови існування розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) такого, що

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

і який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t), \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha \in R^p. \tag{4}$$

Тут $A(t), B(t)$ — $(m \times n)$-, $\Phi(t), f(t), K(t,s)$ — $(n \times m)$-, $(n \times 1)$-, $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектори-стовпчики матриці $\Phi(t)$ є лінійно незалежними на $[a,b]$; ℓ — обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $D_2[a;b]$, $\ell = \operatorname{col}(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_p) : D_2[a;b] \to R^p$, $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p) \in R^p$; $Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна по t і неперервна по ε:

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le q], \quad Z(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b], \quad Z(x(t,\cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0];$$

$J(x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний обмежений p-вимірний векторний функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше [7] і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку.

Далі $x(t,0) = x_0(t, c_r)$ будемо називати *породжуючим розв'язком* крайової задачі для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь (1), (2), де $c_r \in R^r$ — невідомий вектор констант, який буде визначено нижче.

Наведемо відомий критерій розв'язності породжуючої крайової задачі (3), (4) [1].

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \le (p, r_1)$. *Тоді однорідна крайова задача (3), (4)* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *має* r *лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x(t, c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in R^r,$$

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D, \quad r = r_1 - \operatorname{rank} Q.$$

Неоднорідна крайова задача (3), (4) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\alpha - \ell F(\cdot)) = 0, \tag{5}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = p - \operatorname{rank} Q,$$

та має r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t, c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\alpha - \ell F(\cdot)) + F(t) \;\; \forall c_r \in R^r. \tag{6}$$

Тут $\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$, $\Psi(t) = \displaystyle\int_a^t \Phi(s) ds$, відповідно $(n \times (m+n))$- та $(n \times m)$-вимірні матриці; $D = \left[I_m - \displaystyle\int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\, ds, -\int_a^b A(s) ds \right]$ — $(m \times (m+n))$-вимірна матриця, $\tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)ds$, $\tilde{b} = \int_a^b \Big[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\Big]\, ds$, $F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}$, I_m, I_n — одиничні матриці відповідних порядків; P_D, P_{D^*} — відповідно $((m+n)\times(m+n))$-, $(m \times m)$-вимірні матриці, ортопроектори на ядро та коядро матриці D; $P_{D_{r_1}}(P_{D^*_{d_1}})$ — матриця, яка складається із повної системи $r_1(d_1)$ лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці-ортопроектора $P_D(P_{D^*})$. Матриця Q є $(p \times r_1)$-вимірною і побудована згідно з [1]; $D^+(Q^+)$ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до $D(Q)$ матриця. P_Q, P_{Q^*} — відповідно $(r_1 \times r_1)$-, $(p \times p)$-вимірні матриці, ортопроектори на ядро та коядро матриці Q; $P_{Q_r}(P_{Q^*_{d_2}})$ — матриця, яка складається з повної системи r (d_2) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці P_Q (P_{Q^*}) [2].

1.2. Основний результат. Розглянемо критичний випадок, коли відповідна однорідна породжуюча крайова задача має нетривіальні розв'язки $x(t, c_r) = x_0(t, c_r)$. Спочатку встановимо необхідну умову розв'язності крайової задачі (1), (2). Справедливим є наступне твердження.

Теорема 2 (необхідна умова). *Нехай слабконелінійна крайова задача (1), (2) має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$*:*

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b], \quad \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r)$ *(6) з константою* $c_r = c_r^0$ $(r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$.

Тоді вектор констант c_r^0 *обов'язково повинен бути дійсним коренем системи рівнянь*

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0)\, ds\, d\tau + \right.$$
$$\left. + B(s) \int\limits_a^b K(s, \tau) Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) d\tau \right] ds = 0, \tag{7}$$

$$P_{Q^*_{d_2}} \left\{ J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - \ell \left(\int\limits_a^{\cdot} \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0)\, ds\, d\tau \right. \right. +$$
$$+ \Psi_0(\cdot) D^+ \int\limits_a^b \left[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0)\, ds\, d\tau + \right.$$
$$\left. \left. \left. + \; B(t) \int\limits_a^b K(t, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0)\, ds \right] dt \right) \right\} = 0, \tag{8}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = p - \operatorname{rank} Q.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 5.4 [2, с. 119] та теореми 4.5 [7, с. 109]. У випадку періодичних задач константа c_r^0 має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, тому у класичній періодичній задачі відповідне рівняння для систем звичайних диференціальних рівнянь називають рівнянням для породжуючих амплітуд [9, 10]. По аналогії будемо називати рівняння (7), (8) *рівнянням для породжуючих констант* крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь (1), (2).

Якщо рівняння (7), (8) є розв'язним, то вектор $c_r = c_r^0 \in R^r$ визначає той породжуючий розв'язок $x(t, c_r) = x_0(t, c_r^0)$ (6), якому може відповідати розв'язок $x(t, \varepsilon)$ вихідної крайової задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Якщо ж рівняння (7), (8) не має розв'язку, то й крайова задача (1), (2) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні корені рівняння для породжуючих констант (7), (8). Таким чином, необхідна умова розв'язності крайової задачі (1), (2) задовольняється вимогою, щоб рівняння (7), (8) мало хоча б один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in R^r$.

Для отримання достатньої умови існування розв'язку виконаємо заміну змінних у крайовій задачі (1), (2):

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon).$$

Тоді у нових змінних будемо шукати умови існування розв'язку $y(t, \varepsilon)$:

$$y(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b], \quad \dot{y}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad y(t, 0) = 0,$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у нульовий розв'язок крайової задачі

$$\dot{y}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)y(s) + B(s)\dot{y}(s)]\, ds = \varepsilon \int_a^b K(t, s) Z\left(x_0(s, c_r^0) + y(s, \varepsilon), s, \varepsilon\right) ds, \tag{9}$$

$$\ell y(\cdot) = \varepsilon J\left(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right). \tag{10}$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$ та диференційовність за Фреше векторного функціонала $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по перших компонентах в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у вектор-функції $Z(x_0 + y, t, \varepsilon)$ і у векторному функціоналі $J(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε. Тоді має місце розклад

$$Z(x_0 + y, t, \varepsilon) = Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t) y(t, \varepsilon) + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{11}$$

$$J\left(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right) = J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \ell_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{12}$$

де

$$Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) \in C[a, b], \quad J(x_0(\cdot, c_r^0)) = J(x_0(\cdot, c_r^0), 0),$$

$$A_1(t) = A_1(t, c_r^0) = \left.\frac{\partial Z(x, t, 0)}{\partial x}\right|_{x = x_0(t, c_r^0)} \in C[a, b],$$

$\ell_1 y(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J\left(x_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$.

Згідно з [8], лінійний оператор $\ell_1 = J'(x_0)$ є похідною Фреше від векторного функціонала $J\left(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$ у точці $x = x_0(t,c_r^0)$. Нелінійна вектор-функція $R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить до класу $C^1(\|y\| \le q)$, $L_2[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$. При цьому маємо

$$R(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0, \quad R_1(0,0) = 0, \quad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Врахувавши розклад нелінійностей (11), (12) у крайовій задачі (9), (10), отримаємо крайову задачу

$$\dot y(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \left[A(s)y(s) + B(s)\dot y(s)\right]\,ds = p(t,\varepsilon), \tag{13}$$

$$\ell y(\cdot) = \varepsilon\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}, \tag{14}$$

розв'язок якої будемо шукати у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar y(t,\varepsilon), \quad c = c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r,$$

де $c \in R^r$ — невідома константа, яку буде визначено нижче,

$$\bar y(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_0(\cdot,\varepsilon)\right\} + F_0(t,\varepsilon).$$

Згідно з теоремою 1, неоднорідна крайова задача (13), (14) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde b_0(\varepsilon) = 0, \tag{15}$$

$$P_{Q_{d_2}^*}\left\{\varepsilon J\left(x_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - \ell F_0(\cdot,\varepsilon)\right\} = 0. \tag{16}$$

Тут $X_r(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}$ — $(n\times r)$-вимірна матриця, $\tilde b_0(\varepsilon) = \int_a^b [A(s)\tilde p(s,\varepsilon) + B(s)p(s,\varepsilon)]ds$ — $(n\times 1)$-вимірний вектор-стовпчик, компоненти якого належать простору $C[0,\varepsilon_0]$,

$$p(t,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)\left[Z(x_0(s,c_r^0),s,0) + A_1(s)y(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]ds = \varepsilon\left(p_1(t) + p_2^0(t,\varepsilon)\right),$$

$$p_1(t) = \int\limits_a^b K(t,s)A_1(s)X_r(s)\,ds, \quad p_2^0(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\left[A_1(s)\bar y(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]ds,$$

$$F_0(t,\varepsilon) = \tilde{p}(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}_0(\varepsilon) = F_0^1(t) + F_0^2(t,\varepsilon),$$

$$F_0^1(t) = \tilde{p}_1(t) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_1(s) + B(s)p_1(s)\right] ds,$$

$$F_0^2(t,\varepsilon) = \tilde{p}_2^0(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^0(s,\varepsilon) + B(s)p_2^0(s,\varepsilon)\right] ds,$$

$$\tilde{p}(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t p(s,\varepsilon)ds, \quad \tilde{p}_1(t) = \int\limits_a^t p_1(s)ds, \quad \tilde{p}_2^0(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t p_2^0(s,\varepsilon)\, ds.$$

Враховуючи, що $y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar{y}(t,\varepsilon)$ та виконуються умови (7), (8), із (15), (16) отримуємо наступну систему для відшукання невідомого вектора констант $c \in R^r$:

$$P_{D_{d_1}^*}\left\{\int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_1(s) + B(s)p_1(s)\right] ds\right\} c = -P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^0(s,\varepsilon) + B(s)p_2^0(s,\varepsilon)\right] ds, \tag{17}$$

$$P_{Q_{d_2}^*}\left\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell F_0^1(\cdot)\right\} c = -P_{Q_{d_2}^*}\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1\bar{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \ell F_0^2(\cdot,\varepsilon)\right\}. \tag{18}$$

Систему (17), (18) можна записати таким чином:

$$B_0 c = g, \tag{19}$$

де $((d_1+d_2)\times r)$-вимірна матриця

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*}\int_a^b \left[A(s)\tilde{p}_1(s) + B(s)p_1(s)\right] ds \\ \\ P_{Q_{d_2}^*}\left\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell F_0^1(\cdot)\right\} \end{bmatrix}$$

та $((d_1+d_2)\times 1)$-вимірна вектор-функція

$$g := \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*}\int_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^0(s,\varepsilon) + B(s)p_2^0(s,\varepsilon)\right] ds \\ \\ -P_{Q_{d_2}^*}\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1\bar{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \ell F_0^2(\cdot,\varepsilon)\right\} \end{bmatrix}.$$

Система (19) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*}g = 0. \tag{20}$$

Оскільки вектор-функція g містить невідомі величини, то для того, щоб конструктивно скористатися цією умовою, замість (20) будемо вимагати, щоб виконувалась умова $P_{B_0^*} = 0$, яка еквівалентна такій [2]:

$$\operatorname{rank} B_0 = d_1 + d_2. \tag{21}$$

Тут $P_{B_0^*}$ — $((d_1 + d_2) \times (d_1 + d_2))$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір $R^{d_1+d_2}$ на нуль-простір $N(B_0^*)$.

Розв'язуючи систему (19), приходимо до еквівалентної операторної системи

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar{y}(t,\varepsilon),$$

$$c = -B_0^+ g, \tag{22}$$

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_0(\cdot,\varepsilon)\right\} + F_0(t,\varepsilon).$$

Введемо $u = \operatorname{col}(y(t,\varepsilon), c(\varepsilon), \bar{y}(t,\varepsilon))$ та запишемо систему (22) у нових змінних:

$$u = L^{(1)}u + \hat{F}u, \tag{23}$$

де

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & X_r(t) & I_n \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1\varphi = -B_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*}\displaystyle\int_a^b \Big[A(s)\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\,dt + \\ + B(s)\displaystyle\int_a^b K(s,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau\Big]\,ds \\ \\ -P_{Q_{d_2}^*}\Big\{\ell_1\varphi(\cdot) - \ell\Big(\displaystyle\int_a^{\cdot}\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau\; + \\ +\Psi_0(\cdot)D^+\displaystyle\int_a^b\Big[A(s)\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau dt + \\ +\; B(s)\displaystyle\int_a^b K(s,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau\Big]\,ds\Big)\Big\} \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}u = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^+\bar{g} \\ \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_0(\cdot,\varepsilon)\right\} + F_0(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\bar{g} := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\, d\tau\, dt + \right. \\ \left. + B(s) \int_a^b K(s,\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) d\tau \right] ds \\ -P_{Q^*_{d_2}} \left\{ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \ell \left(\int_a^{\cdot} \int_a^b K(\cdot,\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) d\tau\, ds + \right. \right. \\ + \Psi_0(\cdot) D^+ \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) d\tau\, dt + \right. \\ \left. \left. \left. + \ B(s) \int_a^b K(s,\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) d\tau \right] ds \right) \right\} \end{bmatrix}.$$

Систему (22) запишемо у вигляді

$$(I_\varrho - L^{(1)})u = \hat{F}u, \quad \varrho = 2n + r.$$

Блочно-діагональний матричний оператор $(I_\varrho - L^{(1)})$ завжди має обернений, тому систему (22) можна записати таким чином:

$$u = Su, \quad S := (I_\varrho - L^{(1)})^{-1} \hat{F}.$$

За рахунок вибору ε та околу породжуючого розв'язку, враховуючи структуру оператора $\hat{F}$, як і у [9, 10], можна показати, що оператор S є оператором стиску [11], який діє з простору $D_2([a,b]; R^n) \times C([0,\varepsilon_0]; R) \times D_2([a,b]; R^n)$ в себе з відповідною нормою. Отже, операторне рівняння $u = Su$ буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти як $u = \lim_{v\to\infty} u_v$, $u_o = 0$, $u_v = Su_{v-1}$, де $u_0 = \operatorname{col}(y_0, c_0, \bar{y}_0) = 0$. Повертаючись до вихідної крайової задачі (1), (2), для знаходження розв'язку будемо мати наступний *ітераційний процес*.

На першому кроці ітераційного процесу отримуємо крайову задачу

$$\dot{y}_1(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s) y_1(s) + B(s) \dot{y}_1(s)]\, ds = \varepsilon \int_a^b K(t,s) Z\left(x_0(s, c_r^0), s, 0\right) ds, \tag{24}$$

$$\ell y_1(\cdot) = \varepsilon J\left(x_0(\cdot, c_r^0), 0\right), \tag{25}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0), s, 0)\, ds\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \ B(s) \int_a^b K(s,\tau) Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) d\tau \right] ds = 0,$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\left\{J(x_0(\cdot,c^0_r),0)-\ell\left(\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c^0_r),s,0)\,ds\,d\tau\,+\right.\right.$$

$$+\,\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c^0_r),s,0)\,ds\,d\tau\,+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\;B(t)\int\limits_a^b K(t,s)Z(x_0(s,c^0_r),s,0)ds\right]dt\right)\right\}=0.$$

Ці умови виконуються, оскільки породжуючий розв'язок задовольняє умови (7), (8) внаслідок вибору $c^0_r\in R^r$. Перше наближення $y_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (9), (10) вважаємо рівним $\bar y_1(t,\varepsilon)$. Тоді

$$y_1(t,\varepsilon)=\bar y_1(t,\varepsilon)=\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left\{J(x_0(\cdot,c^0_r),0)-\ell F_1(\cdot,\varepsilon)\right\}+F_1(t,\varepsilon),$$

де

$$F_1(t,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c^0_r),s,0)\,ds\,d\tau+$$

$$+\,\varepsilon\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\left[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c^0_r),s,0)\,ds\,d\tau\,+\right.$$

$$\left.+\;B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c^0_r),\tau,0)\,d\tau\right]ds.$$

На другому кроці ітераційного процесу маємо крайову задачу

$$\dot y_2(t)-\Phi(t)\int\limits_a^b\left[A(s)y_2(s)+B(s)\dot y_2(s)\right]ds=\varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)\left[Z(x_0(s,c^0_r),s,0)\,+\right.$$

$$\left.+\;A_1(s)[X_r(t)c_1+\bar y_1(s,\varepsilon)]+R(y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]ds, \tag{26}$$

$$\ell y_2(\cdot)=\varepsilon\left(J(x_0(\cdot,c^0_r))+l_1[X_r(\cdot)c_1+\bar y_1(\cdot,\varepsilon)]+R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right). \tag{27}$$

З необхідної та достатньої умов розв'язності цієї крайової задачі отримуємо алгебраїчну відносно $c_1\in R^r$ систему

$$B_0c_1=\begin{bmatrix}-P_{D^*_{d_1}}\displaystyle\int_a^b\left[A(s)\tilde p^1_2(s,\varepsilon)+B(s)p^1_2(s,\varepsilon)\right]ds\\[2ex] -P_{Q^*_{d_2}}\left\{J(x_0(\cdot,c^0_r))+\ell_1\bar y_1(\cdot,\varepsilon)\,+\right.\\ \left.+\,R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)-\ell F^2_1(\cdot,\varepsilon)\right\}\end{bmatrix}, \tag{28}$$

де

$$F_1^2(t,\varepsilon) = \tilde{p}_2^1(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^1(s,\varepsilon) + B(s)p_2^1(s,\varepsilon)\right] ds,$$

$$p_2^1(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\left[A_1(s)\bar{y}_1(s,\varepsilon) + R(y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right] ds, \quad \tilde{p}_2^1(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t p_2^1(s,\varepsilon)\, ds,$$

яка при умові (21) буде розв'язною. Тоді перше наближення c_1 до $c(\varepsilon)$ має вигляд

$$c_1 = -B_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^1(s,\varepsilon) + B(s)p_2^1(s,\varepsilon)\right] ds \\ \\ -P_{Q_{d_2}^*} \left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1\bar{y}_1(\cdot,\varepsilon) + \right. \\ \left. + R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \ell F_1^2(\cdot,\varepsilon)\right\} \end{bmatrix}.$$

Друге наближення $y_2(t,\varepsilon)$ до шуканого $y(t,\varepsilon)$ є таким:

$$y_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_1 + \bar{y}_2(t,\varepsilon).$$

Продовжуючи ітераційний процес, з операторної системи (22) для знаходження розв'язку $y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$, крайової задачі (9), (10) отримаємо наступну ітераційну процедуру:

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$c_k = -B_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)p_2^k(s,\varepsilon)\right] ds \\ \\ -P_{Q_{d_2}^*} \left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1\bar{y}_k(\cdot,\varepsilon) + \right. \\ \left. + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \ell F_k^2(\cdot,\varepsilon)\right\} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \ell_1 y_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_k(\cdot,\varepsilon)\right\} + F_k(t,\varepsilon).$$

Тут

$$F_k(t,\varepsilon) = \tilde{p}_k(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_k(s,\varepsilon) + B(s)p_k(s,\varepsilon)\right] ds = F_0^1(t) + F_k^2(t,\varepsilon),$$

$$F_0^1(t) = \tilde{p}_1(t) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_1(s) + B(s)p_1(s)\right] ds,$$

$$F_k^2(t,\varepsilon) = \tilde{p}_2^k(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)p_2^k(s,\varepsilon)\right] ds,$$

$$p_k(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(p_1(t) + p_2^k(t,\varepsilon)\right),$$

$$p_1(t) = \int_a^b K(t,s)A_1(s)X_r(s)ds,$$

$$p_2^k(t,\varepsilon) = \int_a^b K(t,s)\left[A_1(s)\bar{y}_{k-1}(s,\varepsilon) + R(y_{k-1}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]\,ds,$$

$$\tilde{p}_k(t,\varepsilon) = \int_a^t p_k(s,\varepsilon)ds, \quad \tilde{p}_1(t) = \int_a^t p_1(s)ds, \quad \tilde{p}_2^k(t,\varepsilon) = \int_a^t p_2^k(s,\varepsilon)\,ds.$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 3 (достатня умова). *Нехай породжуюча крайова задача (3), (4) при виконанні умов (7), (8) має r-параметричну сім'ю розв'язків (6)* $(r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$. *Тоді для кожного дійсного значення вектора $c_r = c_r^0 \in R^r$, що задовольняє систему рівнянь (7), (8) для породжуючих констант, та при умові (21) слабконелінійна крайова задача (1), (2) має хоча б один розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$:*

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$ (6) і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу (29) та формулою $x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_k(t,\varepsilon)$, $k = 0,1,2,\ldots$.

1.3. Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Аналогічно до [2, 12] можна показати, що достатня умова (21) існування розв'язку задачі (1), (2) означає, що константа c_r^0 є простим дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (7), (8). Отже, має місце таке твердження.

Теорема 4. *Для того щоб слабконелінійна крайова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь (1), (2) мала розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$ (6) з константою $c_r = c_r^0 \in R^r$ $(r = m+n-\operatorname{rank} D-\operatorname{rank} Q)$, необхідно, щоб константа c_r^0 була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (7), (8), та достатньо, щоб константа c_r^0 була простим коренем цього рівняння.*

2. Лінійна система інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Розглянемо питання про існування та побудову розв'язків неоднорідної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\right]ds = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{30}$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}, \quad i = 1,\ldots,p, \quad \tau_i \in (a,b). \tag{31}$$

Розв'язок задачі (30), (31) будемо шукати у класі вектор-функцій $x(t)$ таких, що

$$x(t) \in D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}), \quad \dot{x}(t) \in L_2[a,b], \quad t \in [a,b], \quad \tau_i \in (a,b), \quad i = 1,2,\ldots,p.$$

Тут $D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I})$ — простір функцій $x : [a,b] \to R^n$, які допускають розрив I роду у точках $\tau_1,\ldots,\tau_p \in (a,b)$ і абсолютно неперервні на кожному із проміжків $[a,\tau_1), [\tau_1,\tau_2), \ldots$ $\ldots, [\tau_p, b]$. Припускається, що $A(t), B(t)$ — $(m\times n)$-, $\Phi(t)$ — $(n\times m)$-, $f(t)$ — $(n\times 1)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектори-стовпчики матриці $\Phi(t)$ є лінійно незалежними на $[a,b]$; $E_i,\ S_i$ — $(k_i\times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор-стовпчик констант; $\operatorname{rank}(E_i+S_i) = k_i < n$, тобто розв'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0)).$$

Покажемо, що досліджувати задачу з імпульсним впливом (30), (31) можна за допомогою теореми 1, розглядаючи задачу (30), (31) як внутрішню крайову задачу („interface BVP's" [13]). Для того щоб показати цей зв'язок, введемо $\ell x(\cdot)$ — k-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал:

$$\ell := \operatorname{col}(\ell_1,\ldots,\ell_p) : D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to R^k, \quad k := k_1+k_2+\ldots+k_p,$$

$$\ell_i : DS(p) \to R^{k_i}, \quad i = 1,\ldots,p,$$

таким чином:

$$\begin{aligned} \ell_1 x &:= E_1 x(\tau_1+) - (E_1+S_1)x(\tau_1-), \\ \ell_2 x &:= E_2 x(\tau_2+) - (E_2+S_2)x(\tau_2-), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ell_p x &:= E_p x(\tau_p+) - (E_p+S_p)x(\tau_p-) \end{aligned} \tag{32}$$

та запишемо імпульсну дію (31) як крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \gamma \in R^k, \tag{33}$$

де $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p) \in R^k$, $\gamma_i \in R^{k_i}$.

Потрібно знайти умови розв'язності і вигляд загального розв'язку внутрішньої крайової задачі (30), (31) у припущенні, що розв'язок системи (30) існує, тобто виконуються умови теореми 1 [1, с. 1577], та має вигляд

$$x(t,c) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}c + F(t), \quad c \in R^{r_1},$$

$$r_1 = m+n-\operatorname{rank} D,$$

$F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}$, $\tilde{b} = \int_a^b \left[A(s)\tilde{f}(t)(s) + B(s)f(s)\right] ds$, матриця D^+ є псевдооберненою до матриці D, яку побудовано вище.

Розв'язок системи (30) підставляємо у крайову умову (33) та отримуємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора констант $c \in R^{r_1}$:

$$Qc = \gamma - \ell F(\cdot), \tag{34}$$

де $(k \times r_1)$-вимірна стала матриця

$$Q := \operatorname{col}(-S_1 X_{r_1}(\tau_1), \ldots, -S_p X_{r_1}(\tau_p)),$$

$X_{r_1}(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}$ — $(n \times r_1)$-вимірна матриця, $r_1 = m + n - \operatorname{rank} D$. Матрицю в алгебраїчній системі (34) будемо позначати, як і у попередньому випадку, через Q.

Алгебраїчна система (34) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Q^*}\{\gamma - \ell F(\cdot)\} = 0. \tag{35}$$

Нехай $\operatorname{rank} Q = n_2 \leq \min(k, r_1)$. Оскільки вимірність нуль-простору $N(Q)$ дорівнює дефекту матриці Q, то $\dim N(Q) = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q = r_1 - n_2 = r$.

Умова (35) складається із k умов, серед яких є лише d_2 лінійно незалежних умов, $\operatorname{rank} P_{Q^*} = k - \operatorname{rank} Q = k - n_2 = d_2$. Тому введемо $(d_2 \times k)$-вимірну матрицю $P_{Q^*_{d_2}}$, яка складається із d_2 лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{Q^*} = I_k - QQ^+$. Матриця $P_{Q^*_{d_2}}$ дозволяє записати d_2 лінійно незалежних умов розв'язності системи (34):

$$P_{Q^*_{d_2}}\{\gamma - \ell F(\cdot)\} = 0. \tag{36}$$

Якщо умова (36) виконується, то система (34) має розв'язок

$$c = Q^+\{\gamma - \ell F(\cdot)\} + P_{Q_r}c_r \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^{r_2}, \tag{37}$$

$$r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q.$$

Згідно з [1], отриманий вектор $c \in R^r$ визначає r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків крайової задачі (30), (33):

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\gamma - \ell F(\cdot)) + F(t) \quad \forall c_r \in R^r. \tag{38}$$

Таким чином, для імпульсної інтегро-диференціальної системи справджується наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \leq \min(k, r_1)$. *Тоді однорідна імпульсна інтегро-диференціальна система (30), (31)* $(f = 0, \gamma = 0)$ *має* r *лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r, \quad c_r \in R^r,$$

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D, \quad r = r_1 - \operatorname{rank} Q.$$

Неоднорідна імпульсна інтегро-диференціальна система (30), (31) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}}(\gamma - \ell F(\cdot)) = 0, \tag{39}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = k - \operatorname{rank} Q,$$

та має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\gamma - \ell F(\cdot)) + F(t), \tag{40}$$

визначених у класі вектор-функцій

$$x(t) \in D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}), \quad \dot{x}(t) \in L_2[a,b], \quad t \in [a,b], \quad \tau_i \in (a,b), \quad i = 1,\ldots,p.$$

В залежності від параметрів матриць Q і D безпосередньо з теореми 5 випливають наступні твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 = k$, *тобто* $P_{Q^*} = 0$. *Тоді імпульсна інтегро-диференціальна система (30), (31) є розв'язною, якщо виконується умова*

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b} = 0 \quad (d_1 = m - \operatorname{rank} D), \tag{41}$$

і має r-параметричну $(r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$ *сім'ю розв'язків (40) при будь-яких* $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in R^k$, $k := k_1 + \ldots + k_p$.

Наслідок 2. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 = r_1 < k$, *тобто* $P_Q = 0$. *Тоді якщо виконується умова (39), то існує єдиний розв'язок імпульсної інтегро-диференціальної системи (30), (31)*

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\gamma - \ell F(\cdot)) + F(t), \tag{42}$$

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D.$$

Зауваження. Якщо в імпульсній інтегро-диференціальній системі (30), (31) розглядатимемо $(n \times n)$-вимірну одиничну матрицю $E_i := E$, $(n \times n)$-вимірні матриці S_i, n-вимірні вектори-стовпчики γ_i, $i = 1,\ldots,p$, то отримаємо:

1) стандартні імпульсні умови

$$\Delta x|_{t=\tau_i} := x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i \in \mathbb{R}^n,$$

$$\det(E - S_i) \neq 0,$$

які задають розриви по всіх компонентах $x(t)$;

2) матрицю Q, яка має розмір $np \times r_1$, де $r_1 = m + n - \operatorname{rank} D$.

Таким чином, справедливим є наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 = r_1 < np$, *тобто* $P_Q = 0$. *Тоді якщо виконуються умови (39), то існує єдиний розв'язок (42) імпульсної інтегро-диференціальної системи (30), (31).*

1. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576 – 1579.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
3. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 151 – 164.
4. *Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. — 2013. — **1**. — С. 71 – 74.
5. *Golovatska I.* Weakly perturbed boundaty-value problems of integro-differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. — 2013. — **54**. — P. 61 – 71.
6. *Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Boundary-value problems for weakly nonlinear delay differential systems // Abstr. Appl. Anal. — 2011. — **2011**. — Article ID 631412. — 19 p.
7. *Люстерник Л. Ю., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Уч. пос. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
9. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
10. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
11. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1968. — 455 с.
12. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 314 – 321.
13. *Anton Zettl.* Adjoint and self-adjoint BVP's with interface conditions // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — **16**, № 4. — P. 851 – 859.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 572 с.
15. *Бойчук А. А, Покутний А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 3 – 14.
16. *Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Boundary-value problems for weakly nonlinear delay differential systems// Abstr. Appl. Anal. — 2011. — **2011**. — Article ID 631412. — 19 p.
17. *Самойленко А. М., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. — Київ: Вища шк., 1987. — 287 с.

Одержано 16.05.13