УДК 517.962.2

ПРО СТРУКТУРУ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

О. А. Поварова

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
Україна, 03057, Київ, просп. Перемоги, 37

We find conditions for existence of continuous solutions to linear systems and study the structure of the set of such solutions.

Получены условия существования непрерывных решений систем линейных уравнений и исследована структура их множества.

Основи теорії лінійних різницевих і q-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = a(t)x(t),$$

$$x(qt) = b(t)x(t),$$

де всі елементи $a_{ij}(t)$, $i,j = \overline{1,n}$, матриці $a(t) = (a_{ij}(t))$ є аналітичними функціями в деякому околі точки $t = \infty$, були розроблені у працях Біркгофа та його учнів. Зокрема, в [1–3] одержано зображення загального розв'язку таких систем рівнянь і досліджено його структуру. В подальшому такі системи вивчалися багатьма математиками. Особлива увага приділялася вивченню питання існування неперервних розв'язків, структури їх множини, поведінки при $t \to \pm\infty$ (див. [4–6]). У продовження цих досліджень виникло питання про одержання аналогічних результатів для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)x(qt), \tag{1}$$

де $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $a(t), b(t)$ — деякі дійсні матриці розмірності $n \times n$, q — деяка дійсна стала, при певних припущеннях відносно $a(t)$ та q_j, $j = \overline{1,n}$.

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)x(qt) + f(t), \tag{2}$$

де $a(t), b(t), f(t) : R \to R$, та дослідимо структуру множини неперервних розв'язків при виконанні наступних умов:

1) $0 < a_* \le a(t) \le a^* < 1$, $q > 0$;

2) функції $b(t), f(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ і такими, що $\sup\limits_t |b(t)| = b^*$, $\sup\limits_t |f(t)| = f^*$;

3) $\Delta = \dfrac{b^*}{1-a^*} < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1 – 3, то рівняння (2) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок $\widetilde{x}(t)$ у вигляді ряду*

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t), \tag{3}$$

де $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ функції.

Доведення. Дійсно, підставляючи (3) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t+1) = a(t) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t) + b(t) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(qt) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності рівнянь

$$\widetilde{x}_0(t+1) = a(t)\widetilde{x}_0(t) + f(t), \tag{4_0}$$

$$\widetilde{x}_i(t+1) = a(t)\widetilde{x}_i(t) + b(t)\widetilde{x}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4_i}$$

то ряд (3) є формальним розв'язком рівняння (2).

Рівняння (4_0) має розв'язок вигляду

$$\widetilde{x}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{j-1} a(t-i) \right] f(t-j), \tag{5_0}$$

для якого справджується оцінка

$$|\widetilde{x}_0(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \prod_{i=1}^{j-1} a(t-i) \right| |f(t-j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)} f^* \leq f^* \, \frac{1}{1-a^*} = M,$$

$$|\widetilde{x}_0(t)| \leq \frac{f^*}{1-a^*} = M. \tag{6_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (4_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\widetilde{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{j-1} a(t-i) \right] b(t-j)\widetilde{x}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5_i}$$

Покажемо, що ряди (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких при всіх $i \geq 1$ виконуються оцінки

$$|\widetilde{x}_i(t)| \leq M \triangle^i. \tag{6_i}$$

Дійсно, з урахуванням (6_0), (5_1) та умов теореми отримуємо

$$|\widetilde{x}_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \prod_{i=1}^{j-1} a(t-i) \right| |b(t-j)| \, |\widetilde{x}_0(q(t-j))| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)} \, b^* M \leq M \frac{b^*}{1-a^*} = M\Delta,$$

тобто оцінка (6_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (6_i), $i = 1, 2, \ldots$, доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Дійсно, враховуючи (5_{i+1}) та (6_i), маємо

$$|\widetilde{x}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \prod_{i=1}^{j-1} a(t-i) \right| |b(t-j)| \, |\widetilde{x}_i(q(t-j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)} b^* M \Delta^i \leq M \frac{b^*}{1-a^*} \, \Delta^i = M\Delta^{i+1}.$$

Цим самим ми довели, що ряди (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \in R$ до деяких неперервних функцій $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (6_i). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (3) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної функції $\widetilde{x}(t)$, яка є розв'язком рівняння (2) і задовольняє при всіх $t \in R$ умову

$$|\widetilde{x}(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорему 1 доведено.

Виконуючи в (2) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \widetilde{x}(t), \tag{7}$$

отримуємо однорідне рівняння

$$y(t+1) = a(t)y(t) + b(t)y(qt) \tag{8}$$

для функції $y(t)$.

Для рівняння (8) має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < a_* \leq a(t) \leq a^* < 1$, $q > 1$, $a_*^{-1} a^{*q} < 1$;

2) $\widetilde{\triangle} = \dfrac{b^*}{a_* - a^{*q}} < 1$, *де* $\sup\limits_t |b(t)| = b^*$.

Тоді рівняння (8) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що функціонально-різницеве рівняння (8) має розв'язок у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{9}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (9) в (8), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = a(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + b(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють послідовність рівнянь

$$y_0(t+1) = a(t)y_0(t), \tag{10_0}$$

$$y_i(t+1) = a(t)y_i(t) + b(t)y_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10_i}$$

то ряд (9) буде формальним розв'язком рівняння (8). Враховуючи зображення загального неперервного розв'язку рівняння (10_0) та умову 1 теореми 2, можна показати, що існує додатна стала $\widetilde{M}$ така, що при всіх $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq \widetilde{M} a^{*t}. \tag{11_0}$$

Оскільки ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\left[\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p)\right] b(t+j)y_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{11_i}$$

є формальними розв'язками відповідних рівнянь (10_i), $i = 1, 2, \ldots$ (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (11_i) в (10_i), $i = 1, 2, \ldots$), то, взявши до уваги (11_0) і умови 1, 2, покажемо, що ряди (11_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq \widetilde{M}\widetilde{\triangle}^i a^{*qt}. \tag{12_i}$$

Справді, враховуючи (11_0), (11_1), маємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p)\right| |b(t+j)|\,|y_0(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-(j+1)}\, b^*\widetilde{M} a^{*q(t+j)} \leq$$

$$\leq \widetilde{M} b^* a^{*qt} a_*^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(a_*^{-1}a^{*q})^j \leq \widetilde{M}\frac{b^*}{a_* - a^{*q}} a^{*qt} = \widetilde{M}\widetilde{\Delta} a^{*qt},$$

тобто оцінка (12_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (12_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (11_{i+1}) та (12_i) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p) \right| |b(t+j)| \, |y_i(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-(j+1)} b^* \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^i a^{*q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^i b^* a_*^{-1} a^{*q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} (a_*^{-1} a^{*q^2})^j \leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^i b^* a_*^{-1} a^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (a_*^{-1} a^{*q})^j \leq$$

$$\leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^i \frac{b^*}{a_* - a^{*q}} a^{*qt} = \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^{i+1} a^{*qt}.$$

Отже, оцінка (12_i) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$. Звідси випливає, що ряди (11_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких мають місце оцінки (12_i). Згідно з (12_i) ряд (9) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{\widetilde{M}}{1 - \widetilde{\Delta}}$$

і є розв'язком рівняння (8).

Дослідимо тепер структуру множини неперервних розв'язків рівняння (2) при наступних умовах:

1) $1 < a_* \leq a(t) \leq a^* < +\infty$, $q > 0$;

2) функції $b(t)$, $f(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ і такими, що $\sup_t |b(t)| = b^*$, $\sup_t |f(t)| = f^*$;

3) $\theta = \dfrac{b^*}{a_* - 1} < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови 1 – 3, то рівняння (2) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок $\widetilde{x}(t)$ у вигляді ряду*

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t), \tag{13}$$

де $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ функції.

Доведення. Дійсно, підставляючи (13) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t+1) = a(t) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t) + b(t) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(qt) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності рівнянь

$$\widetilde{x}_0(t+1) = a(t) \widetilde{x}_0(t) + f(t), \tag{14_0}$$

$$\widetilde{x}_i(t+1) = a(t)y_i(t) + b(t)\widetilde{x}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{14_i}$$

то ряд (13) є формальним розв'язком рівняння (2).

Рівняння (14_0) має розв'язок вигляду

$$\widetilde{x}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p) \right) f(t+j), \tag{15_0}$$

для якого справджується оцінка

$$|\widetilde{x}_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left| \prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p) \right| |f(t+j)| \le a_*^{-1} f^* \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-j} \le f^* \frac{1}{a_* - 1} = \overline{M},$$

$$|\widetilde{x}_0(t)| \le \frac{f^*}{a_* - 1} = \overline{M}. \tag{16_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (14_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\widetilde{x}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \left[\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p) \right] b(t+j)\widetilde{x}_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{15_i}$$

Покажемо, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких мають місце оцінки

$$|\widetilde{x}_i(t)| \le \overline{M}\theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{16_i}$$

Дійсно, з урахуванням (16_0), (15_1) та умов теореми отримуємо

$$|\widetilde{x}_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left| \prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p) \right| |b(t+j)|\, |\widetilde{x}_0(q(t+j))| \le \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-(j+1)} b^* \overline{M} \le$$

$$\le \overline{M} b^* a_*^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-j} \le \overline{M} \frac{b^*}{a_* - 1} = \overline{M}\theta,$$

тобто оцінка (16_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (16_i) доведено для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (15_{i+1}) та (16_i) маємо

$$|\widetilde{x}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left| \prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p) \right| |b(t+j)|\, |\widetilde{x}_i(q(t+j))| \le \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-(j+1)} b^* \overline{M}\theta^i \le$$

$$\le \overline{M} b^* \theta^i a_*^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-j} \le \overline{M} \frac{b^*}{a_* - 1}\, \theta^i = \overline{M}\theta^{i+1}.$$

Цим самим ми довели, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \in R$ до деяких неперервних функцій $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (16_i). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (13) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної функції $\widetilde{x}(t)$, яка є розв'язком рівняння (2) і задовольняє при всіх $t \in R$ умову

$$|\widetilde{x}(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}.$$

Теорему 3 доведено.

Виконуючи в (2) заміну змінних (7), отримуємо рівняння (8), для якого має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) $1 < a_* \leq a(t) \leq a^* < +\infty$, $q > 1$;

2) $\widetilde{\theta} = \dfrac{b^*}{a^{*q} - a^*} < 1$, *де* $\sup\limits_t |b(t)| = b^*$.

Тоді рівняння (8) має сім'ю неперервних обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що рівняння (8) має розв'язок у вигляді ряду (9), де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції, які є розв'язками послідовності рівнянь (10_i), $i = 0, 1, \ldots$.

Враховуючи зображення загального неперервного розв'язку рівняння (10_0) та умову 1 теореми, можна показати, що існує додатна стала M' така, що при всіх $t \leq 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq M' a^{*t}. \tag{17_0}$$

Оскільки ряди

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{p=1}^{j-1} a(t-p)\right] b(t-j) y_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{17_i}$$

є формальними розв'язками відповідних рівнянь (10_i), $i = 1, 2, \ldots$ (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (17_i) в (10_i), $i = 1, 2, \ldots$), то, взявши до уваги (17_0) і умови 1, 2, покажемо, що ряди (17_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M' \widetilde{\theta}^i a^{*qt}. \tag{18_i}$$

Враховуючи (17_0), (17_1), маємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\prod_{p=1}^{j-1} a(t-p)\right| |b(t-j)|\, |y_0(q(t-j))| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)} b^* M' a^{*q(t-j)} \leq$$

$$\leq M' b^* a^{*qt} a^{*-1} \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(1-q)j} \leq M' \frac{b^*}{a^{*q} - a^*} a^{*qt} = M' \widetilde{\theta} a^{*qt},$$

тобто оцінка (18_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (18_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (17_{i+1}) і (18_i) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \prod_{p=1}^{j-1} a(t-p) \right| |b(t-j)| \, |y_i(q(t-j))| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)} b^* \, M' \widetilde{\theta}^i a^{*q(q(t-j))} \leq$$

$$\leq M' \widetilde{\theta}^i b^* a^{*-1} a^{*q^2 t} \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(1-q^2)j} \leq M' \widetilde{\theta}^i b^* a^{*-1} a^{*qt} \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(1-q)j} \leq$$

$$\leq M' \widetilde{\theta}^i \frac{b^*}{a^{*q} - a^*} a^{*qt} = M' \widetilde{\theta}^{i+1} a^{*qt}.$$

Отже, оцінка (18_i) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$. Звідси випливає, що ряди (17_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких мають місце оцінки (18_i). Згідно з (18_i), ряд (9) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M'}{1 - \widetilde{\theta}}$$

і є розв'язком рівняння (8).

Теорему 4 доведено.

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243–284.
2. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Interative functional equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. — 552 p.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.
4. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. — 1996. — **32**, № 2. — С. 304–312.
5. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Про періодичні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Доп. НАН України. — 2009. — № 8. — С. 24–28.
6. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — **73**, № 2. — С. 269–272.

Одержано 25.09.13