УДК 517.944:519.46

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ КИЛЛИНГА И СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА / Никитин А.Г., Прилипко А.И. - Киев, 1990. - 59 с.- (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 90.23).

В работе исследована нелиевская симметрия уравнения Клейна-Гордона-Фока (КГФ) в $(p+q)$ -мерном пространстве Минковского. Вычислен в явном виде полный набор операторов симметрии уравнения КГФ порядка n для произвольного значения $n<\infty$ и $p+q\leq 4$.

Дается определение обобщенных тензоров Киллинга ранга j и порядка s и обобщенных конформных тензоров Киллинга ранга j и порядка s как полного набора линейно независимых решений некоторых переопределенных систем в частных производных и найден явный вид этих тензоров для произвольных наперед заданных j и s в пространстве Минковского размерности $p+q\leq 4$. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании высших симметрий широкого класса систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Табл. 3. Библиогр.: 16 назв.

Рецензент канд.физ.-мат.наук В.А.Владимиров

Утверждено к печати ученым советом Института математики АН УССР

Введение

Классический теоретико-групповой анализ дифференциальных уравнений, основы которого были заложены Софусом Ли более ста лет назад, находит все более широкое применение в современной математической физике (см., напр., [1 - 3]). Вместе с тем становится очевидной известная ограниченность классического подхода Ли, который все же не позволяет дать полное описание симметрии исследуемого уравнения [4,5]. В частности, этот подход не позволяет вычислить операторы симметрии высших порядков, которые широко используются при описании систем координат, в которых уравнение допускает решения в разделяющихся переменных [6 - 8], при вычислении интегралов движения [9] и для многих других целей.

Настоящая работа посвящена исследованию нелиевской симметрии уравнения Клейна-Гордона-Фока в $(p+q)$ -мерном пространстве Минковского

$$L\psi \equiv \left(g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \varkappa^2 \right)\psi = 0, \tag{1}$$

где $\varkappa$ - вещественный параметр,

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu\neq\nu \\ 1, & \mu=\nu\leq p \\ -1, & p<\mu=\nu\leq p+q \end{cases} \tag{2}$$

$\psi=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q})$ - функция $p+q$ переменных.

Оператором симметрии уравнения (1) называется произвольный оператор Q (линейный, нелинейный, дифференциальный, интегральный), переводящий решения в решения, т.е. [9]

$$L(Q\psi)=0, \quad \text{если} \quad L\psi=0 \tag{3}$$

(более строгое определение см.ниже в § 1).

Дифференциальный оператор конечного порядка n, являющийся оператором симметрии уравнения (1), будем называть оператором симметрии порядка n.

Описание максимальной (в смысле Ли) симметрии уравнения (1) сводится к нахождению всех линейно независимых операторов симметрии первого порядка. Такие операторы хорошо известны, они образуют базис алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(p,q)$ (для $\varkappa \neq 0$) или конформной группы в $(p+q)$ -мерном пространстве (если $\varkappa = 0$).

Один из основных результатов настоящей работы состоит в вычислении в явном виде полного набора операторов симметрии уравнения (1) порядка n для произвольного значения $n < \infty$ и $p+q \leq 4$.

Хорошо известно, что описание операторов симметрии первого порядка базируется на вычислении явного вида вектора Киллинга [10, 2], соответствующего пространству независимых переменных. Операторам симметрии высших порядков ставятся в соответствие более сложные фундаментальные объекты, которые мы называем тензорами Киллинга ранга j и порядка s, $j, s = 1, 2, \ldots$ и конформными тензорами Киллинга ранга j и порядка s.

В работе дается определение упомянутых тензоров как полного набора линейно независимых решений некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных и найден их явный вид для произвольных наперед заданных j и s в пространстве Минковского размерности $p+q \leq 4$. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании высших симметрий широкого класса уравнений математической физики, заданных в этом пространстве – в частности, релятивистских и галилеевски-инвариантных волновых уравнений.

Остановимся коротко на расположении материала. В § 1 приведены основные определения, относящиеся к операторам симметрии высших порядков, в § 2 – определение тензоров Киллинга ранга j и порядка s. В §§ 3,4 найдены в явном виде тензоры Киллинга ранга j первого порядка, в §§ 6,8 и 9 – конформные тензоры Киллинга и тензоры Киллинга произвольного ранга и порядка. В §§ 5, 7 приведен полный набор операторов симметрии порядка n уравнения (1) с нулевой и ненулевой "массой" $\varkappa$.

§ 1. Операторы симметрии порядка n

Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением только таких решений уравнения (1), которые определены на некотором открытом множестве D четырехмерного многообразия R_{p+q}, состоящего из точек с координатами $(x_1, x_2, \ldots x_{p+q})$, и аналитичны относительно вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots x_{p+q}$. Множество всех таких решений образует комплексное векторное пространство, которое мы будем обозначать символом $\mathcal{F}_0$. Фиксируя D (например, предполагая, что D совпадает с R_{p+q}) будем называть $\mathcal{F}_0$ пространством решений уравнения (1).

Обозначим символом $\mathcal{F}$ векторное пространство всех комплексно значных функций, которые определены на D и являются вещественно-аналитическими, а символом L – линейный дифференциальный оператор (1), определенный на $\mathcal{F}$. Тогда $L\psi \in \mathcal{F}$ если $\psi \in \mathcal{F}$. При этом $\mathcal{F}_0$ является таким подпространством векторного пространства $\mathcal{F}$, которое совпадает с нуль-пространством (ядром) оператора L.

Пусть $\mathfrak{M}_n$ – множество (класс) дифференциальных операторов порядка n, определенных на $\mathcal{F}$. Тогда оператор симметрии $Q \in \mathfrak{M}_n$ уравнения (1) определяется следующим образом.

<u>Определение</u>. Линейный дифференциальный оператор порядка

$$Q = \sum_{i=0}^{n} Q_i , \quad Q_i = H^{(a_1 a_2 \ldots a_i)} \frac{\partial^i}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \ldots \partial x_{a_i}} , \quad H^{(a_1 a_2 \ldots a_i)} \in \mathcal{F} \tag{4}$$

называется оператором симметрии уравнения (1) в классе $\mathfrak{M}_n$ (или оператором симметрии порядка n), если

$$[Q, L] = \alpha_Q L , \quad \alpha_Q \in \mathfrak{M}_{n-1} , \tag{5}$$

где $[Q,L] = QL - LQ$ – коммутатор операторов Q и L.

Соотношение (5) следует понимать в том смысле, что операторы, стоящие в левой и правой частях, дают один и тот же результат при действии на произвольную функцию $\psi \in \mathcal{F}$. Подлежащие определению функции $H^{(a_1 a_2 \ldots a_i)}$ являются симметричными тензорами ранга i, здесь и далее круглые скобки заключают в себе набор симметричных индексов.

Нетрудно убедиться, что из (5) следует соотношение (3) для любого $\psi \in \mathcal{F}_0$. Справедливо и обратное утверждение: если оператор (4) удовлетворяет соотношению (3) для произвольного $\psi \in \mathcal{F}_0$, то для него выполняется условие (5) с некоторым оператором α_Q. В случае $n=1$ определенные выше операторы симметрии могут интерпретироваться как генераторы группы инвариантности рассматриваемого уравнения [7]. Можно показать, что множество операторов симметрии $Q \in \mathcal{M}_1$ образует алгебру Ли, а соответствующие конечные преобразования из группы инвариантности получаем, интегрируя уравнения Ли [7,9].

Операторы симметрии порядка $n>1$ уже не являются генераторами группы Ли и характеризуют обобщенную (нелиевскую) симметрию исследуемого уравнения. Задача описания полного набора операторов симметрии порядка n для уравнения (1) сводится к нахождению общего решения операторных уравнений (5).

§ 2. Уравнения для коэффициентов оператора симметрии. Тензоры Киллинга ранга j и порядка s

Для упрощения дальнейших вычислений оператор Q (4) удобно представить в виде суммы i-кратных антикоммутаторов

$$Q = \sum_{j=0}^{n} \hat{Q}_j \ , \tag{6}$$

где

$$\hat{Q}_j = [\ldots[[F^{(a_1 a_2 \ldots a_j)}, \frac{\partial}{\partial x_{a_1}}]_+, \frac{\partial}{\partial x_{a_2}}]_+, \ldots \frac{\partial}{\partial x_{a_j}}]_+ \ , \tag{7}$$

$[A,B]_+ = AB + BA$, $F^{(a_1 a_2 \ldots a_i)}$ – симметричный тензор ранга i. Раскрывая антикоммутаторы и перенося операторы дифференцирования вправо, выражение (6) для оператора Q можно свести к форме (4) и наоборот, любой оператор вида (4) может быть записан в форме (6).

Аналогичное представление используем для оператора $\alpha_Q \in \mathcal{M}_{n-1}$

$$\alpha_Q = \sum_{i=n-2}^{n-1} \hat{\alpha}_i \ , \tag{8}$$

$$\hat{\alpha}_i = [\ldots[[f^{a_1 a_2 \ldots a_i}, \frac{\partial}{\partial x_{a_1}}]_+, \frac{\partial}{\partial x_{a_2}}]_+, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{a_i}}]_+ \ ,$$

а произведение $\alpha_Q L$ запишем в виде

$$\alpha_Q L = \frac{1}{4}[[\alpha_Q, \frac{\partial}{\partial x_\mu}]_+, \frac{\partial}{\partial x^\mu}]_+ + \frac{1}{2}[\alpha_{Q_\mu}, \frac{\partial}{\partial x_\mu}]_+ \ , \tag{9}$$

где $\alpha_{Q_\mu} = \frac{\partial \alpha_Q}{\partial x_\mu}$.

Используя представления (6)-(9) и принимая во внимание, что

$$[Q, L] = [Q_\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu}]_+ \ , \quad Q_\mu = \frac{\partial Q}{\partial x_\mu} \ , \tag{10}$$

операторное уравнение (5) можно свести к системе дифференциальных уравнений для коэффициентов $f^{a_1 a_2 \ldots a_i}$ и $F^{a_1 a_2 \ldots a_j}$. Действительно, подставляя (6)-(10) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях операторов дифференцирования, получаем

$$\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j)} = 0 \ , \tag{11}$$

$$f^{(a_1 a_2 \ldots a_i)} \equiv 0 \ . \tag{12}$$

Здесь $\partial^{a_{j+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{a_{j+1}}}$, в круглых скобках заключены симметричные индексы (т.е. в (11) подразумевается симметризация:
$\frac{1}{j!}\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j)} = \partial^{a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j} + \partial^{a_1} F^{a_{j+1} a_2 \ldots a_j} + \partial^{a_2} F^{a_1 a_{j+1} \ldots a_j} + \ldots + \partial^{a_j} F^{a_1 a_2 \ldots a_{j+1}}$, $F^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ – симметричный тензор ранга j.

Если же $\varkappa = 0$, то уравнение для коэффициентов оператора симметрии принимает вид

$$\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j)} = \delta^{(a_j a_{j+1}} f^{a_1 a_2 \ldots a_{j-1})} \ , \tag{13}$$

где $F^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ и $f^{a_1 a_2 \ldots a_{j-1}}$ – симметричные бесследовые тензоры.

Свертывая уравнения (13) по одной паре индексов, можно исключить неизвестные $f^{a_1 a_2 \ldots a_{j-1}}$. В результате получаем

$$\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j)} - \frac{j}{m+j-1} \partial^b F^{b(a_2 a_3 \ldots a_j} g^{a_1 a_{j+1})} = 0 \ , \tag{14}$$

$$f^{a_1a_2\ldots a_{j-1}} = \frac{j}{m+j-1}\,\partial_b F^{b(a_1a_2\ldots a_{j-1}}\, g^{a_j a_{j+1})}, \qquad (15)$$

где $m=p+q$ – размерность пространства независимых переменных.

Мы видим, что задача описания операторов симметрии порядка n для уравнения (1) с $\varkappa=0$ оказывается эквивалентной нахождению общего решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, задаваемой формулой (11). Эта система является незацепляющейся по индексу j, т.е. распадается на независимую подсистему, соответствующую $j=0,1,\ldots n$. Как будет показано ниже, для полного описания операторов симметрии фактически достаточно решить только две таких подсистемы, соответствующих $j=n$ и $j=n-1$.

В случае $j=1$ система (11) совпадает с уравнениями Киллинга [2,10], а при $j=2$ – с уравнениями для тензора Киллинга [9] в плоском пространстве де Ситтера. Соответствующие уравнения (14) определяют конформные вектор Киллинга и тензор Киллинга в $(p+q)$-мерном пространстве Минковского.

Функции $F^{a_1a_2\ldots a_j}$, удовлетворяющие уравнениям (11) (или (14)), будем называть тензором Киллинга (или конформным тензором Киллинга) ранга j первого порядка. Смысл термина "первого порядка" (который мы иногда будем опускать) будет пояснен ниже.

Уравнения (11), (13) для тензора произвольного ранга были введены (в случае $j>2$ – вне связи с какой-либо конкретной задачей) в работе [11]. Однако общее решение этих уравнений, насколько нам известно, получено в явном виде только для случаев $j=1$ и $j=2$ [12].

При исследовании операторов симметрии высших порядков, допускаемых системами уравнений в частных производных, приходится сталкиваться с более сложными уравнениями для коэффициентов таких операторов, чем задаваемые формулами (11) или (14). Эти уравнения включают производные порядка $S>1$ и имеют вид [13]

$$\partial^{(a_{j+1}}\partial^{a_{j+2}}\ldots\partial^{a_{j+s}} F^{a_1a_2\ldots a_j)} = 0, \qquad (16)$$

где $F^{a_1a_2\ldots a_j}$ – симметричный тензор, и

$$\left[\partial^{(a_{j+1}}\partial^{a_{j+2}}\ldots\partial^{a_{j+s}}\tilde F^{a_1a_2\ldots a_j)}\right]^{SL} = 0, \qquad (17)$$

где $\tilde F^{a_1a_2\ldots a_j}$ – симметричный бесследовый тензор, а символ $[\cdot]^{SL}$ обозначает бесследовую часть тензора в квадратных скобках (в нашем случае это симметричный тензор ранга $R=j+s$):

$$\left[G^{a_1a_2\ldots a_R}\right]^{SL} = G^{a_1a_2\ldots a_R} + \sum_{d=1}^{\{\frac{R}{2}\}} (-1)^d K_d \left(\prod_{i=1}^{d} g^{a_{2i-1}a_{2i}}\right)\times$$
$$\times F^{a_{2d+1}a_{2d+2}\ldots a_j b_1 b_2 b_3 b_4\ldots b_{2d-1}b_{2d}}\, g_{b_1b_2}g_{b_3b_4}\ldots g_{b_{2d-1}b_{2d}}, \qquad (18)$$

где $\{\frac{R}{2}\}$ целая часть числа $\frac{R}{2}$,

$$K_d = \frac{n!}{(n-2d)!\,2^{d-1}}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{2(n-i)+m-2}. \qquad (19)$$

В случае $S=1$ уравнения (16) и (17) сводятся к уравнениям (11) и (14) соответственно.

Симметрийный тензор $F^{a_1a_2\ldots a_j}$, удовлетворяющий уравнениям (16), будем называть тензором Киллинга ранга j и порядка S. Симметрийный бесследовый тензор $\tilde F^{a_1a_2\ldots a_j}$, удовлетворяющий уравнениям (17), будем называть конформным тензором Киллинга ранга j и порядка S.

Ниже в §§ 3-7 получено общее решение уравнений (11), (14) для произвольных j в пространстве размерности $p+q\leq 4$. Уравнения (16), (17) обсуждаются в §§ 8, 9, где найдено их общее решение для $p+q\leq 4$ и произвольных j и S.

§ 3. Редукция уравнений для коэффициентов оператора симметрии к системе линейных алгебраических уравнений

Приступим к исследованию системы уравнений (11), описывающих тензор Киллинга ранга j первого порядка.

Система (11) может быть записана в следующей символической форме:

$$\mathcal{F}^{a_1a_2\ldots a_{j+1}} = 0, \qquad (20)$$

где $F^{a_1 a_2 \dots a_{j+1}}$ – симметричный тензор ранга $j+1$ в $m=p+q$-мерном пространстве, а неизвестные функции – это компоненты симметричного тензора ранга j в пространстве размерности m. Отсюда видно, что рассматриваемая система переопределена, включая C^{j+1}_{j+m} уравнений для C^{j}_{j+m-1} неизвестных, где C^{a}_{b} – число сочетаний из b элементов по a.

Следуя общему методу решения переопределенных систем дифференциальных уравнений [I4], рассмотрим набор дифференциальных следствий системы (II), получаемый дифференцированием каждого члена K раз по x_{b_i} $(i=1,2,\dots K)$. При каждом фиксированном K такие дифференциальные следствия представляют собой системы линейных однородных алгебраических уравнений для производных

$$\partial^{b_1}\partial^{b_2}\dots\partial^{b_K}\partial^{a_{j+1}}F^{a_1 a_2\dots a_j} \equiv F^{(a_1 a_2\dots a_j,\, a_{j+1})\, b_1 b_2\dots b_K} \quad . \tag{2I}$$

Эти системы имеют вид

$$F^{(a_1 a_2\dots a_j,\, a_{j+1})\, b_1 b_2\dots b_K} = 0 \quad . \tag{22}$$

Система уравнений (22) определяет условие равенства нулю тензора ранга $j+K+1$, симметричного по $j+1$ индексу $a_1, a_2, \dots a_{j+1}$ и по K индексам $b_1, b_2, \dots b_K$, причем неизвестными являются компоненты тензора (2I), который имеет ранг $j+K+1$ и симметричен по j индексам $a_1, a_2, \dots a_j$ и $K+1$ индексу $a_{j+1}, b_1, \dots b_K$. Отсюда заключаем, что соответствующие количества уравнений (N_y) и неизвестных (N_H) задаются формулами

$$N_y = C^{j+1}_{j+m}\, C^{K}_{K+m-1} \;, \quad N_H = C^{j}_{j+m-1}\, C^{K+1}_{m+K} \;, \tag{23}$$

где $m=p+q$ – размерность пространства Минковского, в котором определены уравнения (II) (т.е. число независимых переменных x_1, $x_2, \dots$ функции $F^{a_1 a_2\dots a_j}$).

Согласно (23)

$$N_y < N_H \;, \quad K<j \;; \qquad N_y = N_H \;, \quad K=j \;. \tag{24}$$

Формулы (23) позволяют вычислить количество линейно независимых решений уравнений (22), поскольку справедливо следующее утверждение.

<u>Теорема I</u>. Система линейных алгебраических уравнений (22) невырождена.

Доказательство теоремы для $m \le 4$ приведено ниже в дополнении.

Из (24) заключаем в силу теоремы I, что при $K=j$ система однородных линейных алгебраических уравнений (22) имеет только тривиальные решения,

$$F^{a_1 a_2\dots a_j,\, a_{j+1}\, b_1 b_2\dots b_j} = 0$$

Следовательно, коэффициенты оператора симметрии $F^{a_1 a_2\dots a_j}$ являются полиномами от x_a $(a=1,2,\dots m)$ порядка j. Из (23) следует, что такой полином содержит N^m_j произвольных параметров, где

$$N^m_j = \sum_{K=0}^{j}\left(N^K_y - N^K_H\right) = \frac{1}{m}\, C^{m-1}_{j+m-1}\, C^{m-1}_{j+m} \quad . \tag{25}$$

Мы видим, что уравнения (II) имеют N^m_j линейно независимых решений, составляющих полную систему. Для нахождения этих решений в явном виде необходимо найти общее решение системы линейных однородных уравнений (22) для произвольных наперед заданных j, m и $K<j$, а затем восстановить полиномы $F^{a_1 a_2\dots a_j}$ по найденным значениям производных тензоров $F^{a_1\dots a_j,\, a_{j+1}\, b_1 b_2\dots b_K}$ (напомним, что индексами, стоящими после запятой, обозначены производные по соответствующему аргументу). Общее решение уравнений (II) приведено ниже в § 4.

§ 4. Явный вид тензора Киллинга ранга j

По доказанному выше вычислению явного вида тензора Киллинга ранга j сводится к нахождению общего решения невырожденной системы линейных однородных алгебраических уравнений, задаваемых формулой (22). Непосредственное решение такой системы при произвольных наперед заданных j и m представляет достаточно сложную задачу, которую можно обойти, используя следующее наблюдение.

<u>Лемма I</u>. Пусть $F^{a_1 a_2\dots a_{j_0}}$ – произвольное решение системы (II) для $j=j_0$, а F^{a} – решение этой системы для $j=1$.

Тогда функция

$$F^{a_1 a_2 \ldots a_{j_0+1}} = F^{(a_1 a_2 \ldots a_{j_0}} F^{a_{j_0+1})} \tag{26}$$

является решением системы (11) для $j = j_0 + 1$.

<u>Доказательство</u> элементарно и производится прямой проверкой.

Лемма 1 дает конструктивный алгоритм построения решений уравнений (11). Действительно, решение этих уравнений для $j=1$ хорошо известно – это вектор Киллинга [2,10], а решение для произвольного j получаем из решения для $j=1$ последовательным применением формулы (26). Если удастся построить таким путем N_j^m линейно независимых решений, где N_j^m задается формулой (25), то такие решения в силу теоремы 1 образуют полную систему.

Используя приведенный выше алгоритм, нам удалось получить общее решение уравнений (11) для $m \leq 4$ в виде

$$F^{a_1 a_2 \ldots a_j} = g^{(a_{j-1} a_j} F^{a_1 a_2 \ldots a_{j-2})} + f^{a_1 a_2 \ldots a_j} , \tag{27}$$

где $F^{a_1 a_2 \ldots a_{j-2}}$ – общее решение уравнений (11) для $j \to (j-2)$, зависящее от N_{j-2}^m произвольных параметров, а $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ – решение уравнений (11), зависящее от $N_j^m - N_{j-2}^m$ произвольных параметров.

Первое слагаемое в правой части формулы (27) соответствует такому оператору симметрии (7) порядка j , который на множестве решений уравнения (1) сводится к оператору симметрии порядка $j-2$. Явные выражения для $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$, соответствующие $m \leq 4$, приведены ниже.

1. $m=1$. Соответствующий тензор $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ сводится к скаляру, не зависящему от единственной имеющейся переменной.

2. $m=2$. Тензоры $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ зависят от двух переменных x_1 и x_2 . Число независимых решений, согласно (25), равно

$$N = N_j^2 - N_{j-2}^2 = 2j+1 . \tag{28}$$

Решения нумеруются целым числом c , удовлетворяющим условию

$$0 \leq c \leq j , \tag{29}$$

и включают при $c=0$ один, а при каждом $c>0$ – два произвольных параметра, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $\lambda^{a_1 a_2 \ldots a_{j-c}}$ ранга $j-c$. $f_c^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ задается формулой (30)

Явный вид соответствующего решения $f_c^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ задается формулой (30)

$$f_c^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \varepsilon \hat{f}^{a_1 a_2 \ldots a_j} + (1-\varepsilon) \hat{f}^{(a_1 a_2 \ldots a_{j-1}} \varepsilon^{a_j) b} x_b , \tag{30}$$

где $\varepsilon^{a_j b}$ – единичный антисимметричный тензор, $\varepsilon = \frac{1}{2}[1+(-1)^c]$

$$\hat{f}^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \lambda^{(a_1 a_2 \ldots a_{j-c}} \sum_{\mu=0}^{\{\frac{c}{2}\}} \Big(\prod_{i=j-c+1}^{j-c+2\mu} x^{a_i} \Big)^*$$

$$\times \Big(\prod_{k=\{\frac{j-c}{2}\}+\mu+1}^{\min\{\frac{j}{2}, \frac{j+1}{2}-\ell\}} g^{a_{2k+\ell} a_{2k})} \Big)^* (-1)^\mu C^\mu_{\{\frac{c}{2}\}} (x^2)^{\{\frac{c}{2}\}-\mu} ,$$

$$\Big(\prod_{\lambda=A}^{B} f_\lambda \Big)^* = \begin{cases} \prod_{\lambda=A}^{B} f_\lambda , & B \geq A \\ 1 , & B < A \end{cases} , \qquad x^2 = x_1^2 + x_2^2 , \quad \ell = (-1)^{j+c+1} , \tag{31}$$

по индексам $a_1, a_2 \ldots a_j$ в правой части подразумевается симметризация.

3. $m=3$. Тензор $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ зависит от трех переменных $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Число независимых решений равно

$$N = N_j^3 - N_{j-2}^3 = \frac{1}{3}(j+1)(2j^2+4j+3) . \tag{32}$$

Решения нумеруются парами целых чисел $c = (c_1, c_2)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \le c_1 \le 2\left\{\frac{j}{2}\right\}, \quad 0 \le c_2 \le j - c\left\{\frac{c_1+1}{2}\right\}, \quad \varepsilon_a = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^a\right], \tag{33}$$

и включают при каждом c набор $2c_1+1$ произвольных параметров, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $\lambda_c^{a_1 a_2 \ldots a_{c_1}}$ ранга c_1. Явные выражения для соответствующих решений $f_c^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ задаются формулой (34):

$$f_c^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \varepsilon_{c_2} \hat{f}_{c_1 c_2}^{a_1 a_2 \ldots a_j} + (1 - \varepsilon_{c_2}) \hat{f}_{c_1 c_2}^{b(a_1 a_2 \ldots a_{j-1}} \varepsilon^{a_j) bc} x_c, \tag{34}$$

где $\varepsilon^{a_j b c}$ – единичный антисимметричный тензор,

$$\hat{f}_{c_1 c_2}^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \sum_{\mu} K_{\mu} \lambda_c^{B_\mu, (A_\mu} \left(\prod_{i=A_\mu+1}^{A_\mu+L_\mu} x^{a_i} \right)^{*} \left(\prod_{k=\left\{\frac{1}{2}(A_\mu+L_\mu)\right\}+1}^{\min\left(\left\{\frac{j}{2}\right\}, \left\{\frac{j+1}{2}\right\} - \ell\right)} g^{a_{2k} a_{2k+\ell})} \right)^{*} (x^2)^{F_\mu}. \tag{35}$$

Здесь

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5), \quad x^2 = x_a x_b g^{ab}, \tag{36}$$

$$K_\mu = (-1)^{\mu_1 + \mu_3 + \mu_5} \cdot 2^{\mu_3} \frac{\left\{\frac{c_2}{2}\right\}!}{\mu_2! \mu_3! \mu_4!} \cdot C^{\mu_1}_{\left[\frac{c_1}{2}\right]}$$

$$B_\mu = 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_5, \quad A_\mu = j - c_1 - B_\mu, \quad \ell = (-1)^{c_2 + j + 1},$$

$$L_\mu = c_1 + \mu_3 - 2\mu_1 - \mu_5, \quad F_\mu = \mu_1 + \mu_4,$$

а λ^{B_μ, A_μ} – произвольный симметричный бесследовый тензор ранга $A_\mu + B_\mu$, свернутый с B_μ векторами x_k:

$$\lambda^{B_\mu, A_\mu} = \lambda^{b_1 b_2 \ldots b_{B_\mu} a_1 a_2 \ldots a_{A_\mu}} x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_{B_\mu}} \tag{37}$$

Суммирование в (35) ведется по всем возможным неотрицательным целым значениям μ, удовлетворяющим условиям

$$0 \le \mu_1 \le \left\{\frac{c_1}{2}\right\}, \quad \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \left\{\frac{c_2}{2}\right\}, \quad 0 \le \mu_5 \le \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{c_1}\right]. \tag{38}$$

Как и в формуле (31), по индексам $a_1 a_2 \ldots a_j$ в правой части (35) подразумевается симметризация.

4. $m = 4$. Тензор $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ зависит от четырех переменных $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Число линейно независимых решений равно

$$N = N_j^4 - N_{j-2}^4 = \frac{1}{4!}(j+1)(j+2)(2j+3)(j^2+3j+4). \tag{39}$$

Решения нумеруются тройками целых чисел $c = (c_1, c_2, c_3)$, удовлетворяющих условиям (33) и (40):

$$0 \le c_3 \le j - 2\left\{\frac{c_1+1}{2}\right\} - 2c_2, \tag{40}$$

и включают при каждом c набор N_c произвольных параметров, где

$$N_c = \begin{cases} (c_2 + 2c_3 + 1)^2, & c_1 = c_2 + 2c_3 \\ 2(c_2 + 2c_3 + 1)(2c_1 - c_2 - 2c_3 + 1), & c_1 \ne c_2 + 2c_3. \end{cases} \tag{41}$$

Эти параметры задают независимые компоненты неприводимого тензора $\lambda^{a_1 a_2 \ldots a_{R_1} [a_{R_1+1} b_1][a_{R_1+2} b_2] \ldots [a_{R_1+R_2} b_{R_2}]}$, где $R_1 = c_2 + 2c_3$, $R_2 = c_1 - c_2 - 2c_3$ (напомним, что неприводимый тензор ранга $R_1 + 2R_2$ имеет R_1 симметричных индексов и R_2 симметричных пар антисимметричных индексов, причем свертка по любой паре индексов и любой тройки индексов с полностью антисимметричным тензором $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ равны нулю). Явные выражения для соответствующих решений задаются формулой (42):

$$f_c^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \sum_{\mu} K_\mu \lambda^{B_\mu, (A_\mu, D_c} \left(\prod_{i=A_\mu+D_c+1}^{A_\mu+D_c+L_\mu} x^{a_i} \right)^{*} \left(\prod_{k=\left\{\frac{1}{2}(A_\mu+D_c+L_\mu)\right\}+1}^{\left\{\frac{j}{2}\right\}} g^{a_{2k+\ell} a_{2k})} \right)^{*} (x^2)^{F_\mu}, \tag{42}$$

где μ, x^2, K_μ, B_μ, F_μ задаются формулами (36), (38)

$$a, b = 1, 2, 3, 4, \quad A_\mu = j - c_1 - B_\mu - D_c, \quad D_c = c_3, \quad \ell = (-1)^{n+1},$$

$$\lambda^{B_\mu, A_\mu, D_c} = \lambda^{b_1 b_2 \ldots b_{B_\mu} a_1 a_2 \ldots a_{A_\mu} [a_{A_\mu+1} d_1] \ldots [a_{A_\mu+D_c} d_{D_c}]} \times$$

$$\times x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_{B_\mu}} x_{d_1} x_{d_2} \ldots x_{d_{D_c}}, \tag{43}$$

по индексам $a_1, a_2, \dots a_j$ в правой части (42) подразумевается симметризация.

Итак, мы получили общее решение уравнений (II) в пространствах размерности $m \le 4$. Можно убедиться прямой проверкой, что найденные решения действительно удовлетворяют соотношениям (II) и являются линейно независимыми (последнее несложно доказать, рассматривая i-кратные свертки найденных решений с $g^{k\ell}$, $0 \le i \le \{\frac{j}{2}\}$) С другой стороны, эти решения образуют полную систему, так как число входящих в них произвольных параметров согласуется с формулой (25).

Отметим также, что общее решение уравнений (II) можно представить в виде

$$F^{a_1 a_2 \dots a_j} = \sum_{\ell=0}^{j} \lambda^{a_1 a_2 \dots a_\ell [a_{\ell+1} b_1][a_{\ell+2} b_2] \dots [a_j b_{j-\ell}]} x_{b_1} x_{b_2} \dots x_{b_{j-\ell}}, \tag{44}$$

где $\lambda^{a_1 a_2 \dots a_\ell [a_{\ell+1} b_1] \dots [a_j b_{j-\ell}]}$ – тензор, симметричный относительно перестановки индексов $a_1 \dots a_j$ и антисимметричный относительно перестановок индексов $a_{\ell+i}$ с b_i, $1 \le i \le j-\ell$, причем свертка этого тензора по любым трем индексам $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ равна нулю. Последнее означает, что циклическая перестановка по любой тройке индексов $(a_k, a_{\ell+c}, b_a)$ дает нуль, так что полином (44) заведомо удовлетворяет уравнению (II). С другой стороны, число независимых компонент тензоров $\lambda^{a_1 a_2 \dots a_\ell [a_{\ell+1} b_1] \dots [a_j b_{j-\ell}]}$ для $0 \le \ell \le j$ в точности равно N_j^m (25), так что формула (44) задает общее решение уравнений (II). Разлагая тензоры $\lambda^{a_1 \dots a_\ell [a_{\ell+1} b_1] \dots [a_j b_{j-\ell}]}$ $0 \le \ell \le j$ на неприводимые (т.е. имеющие нулевые свертки по любой паре индексов), приходим к формулам (26)-(43).

Изложенные выше результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Уравнения (II) в пространстве размерности $m \le 4$ имеют N_j^m линейно независимых решений. Эти решения являются полиномами от x_a степени j и задаются в явном виде соотношениями (26)-(43).

Приведенная теорема определяет явный вид тензора Киллинга ранга j в пространстве размерности $m \le 4$.

§ 5. Явный вид операторов симметрии Q_n для $n \le 4$

Результаты, приведенные выше, позволяют выписать в явном виде полный набор операторов симметрии порядка n для уравнения (I) в пространстве m измерений для произвольных наперед заданных $n < \infty$ и $m \le 4$. Для этого достаточно перебрать все допустимые значения чисел C, задаваемые формулами (29), (33), (40) и построить по формулам (26)-(43) соответствующие выражения для тензоров Киллинга ранга j $F_c^{a_1 a_2 \dots a_j}$ (согласно (27), достаточно ограничиться построением $f^{a_1 a_2 \dots a_j}$), затем подставить полученные выражения в (6), (7) и просуммировать по j от 0 до n.

В этом параграфе мы осуществим эту программу для всех $n \le 4$ и $m \le 4$ и выпишем в явном виде соответствующие операторы симметрии.

Подсчитаем количество линейно независимых операторов симметрии порядка n. Оно равно, согласно (27), числу независимых решений системы (II) для $j = n$, $n-1$ или (см. (25))

$$N(n,m) = N_m^n + N_m^{n-1} = \frac{2n^2 + 2mn + m(m-1)}{m(m-1)} C_{n+m-2}^{m-2} C_{n+m-1}^{m-2}. \tag{45}$$

В частности, для $m = 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} N(n,2) &= (n+1)^2; \\ N(n,3) &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n^2+3n+3); \\ N(n,4) &= \frac{1}{72}(n+1)(n+2)^2(n+3)(n^2+4n+6). \end{aligned} \tag{46}$$

Значения этих чисел для $n = 1, 2, 3, 4$ приведены в табл. I.

Таблица I. Количество операторов симметрии порядка n для уравнения (I) в m -мерном пространстве

$m \backslash n$	1	2	3	4
2	4	9	16	25
3	7	26	70	155
4	11	60	225	665

Выпишем в явном виде соответствующие решения $F_m^{(n)} = F_m^{a_1 \dots a_n}$ уравнений (II)

$$m = 1$$

$$n = 1,2,3,4, \quad F_1^{(n)} = \lambda_{1n}$$

$$m = 2$$

$$\begin{aligned}
&n = 0, \quad F_2^{(0)} = \lambda_{20} ; \\
&n = 1, \quad F_2^{a} = \lambda_{21}^{a} + \lambda_{21} \varepsilon^{ab} x_b ; \\
&n = 2 \quad F_2^{a_1 a_2} = g^{a_1 a_2} F_2^{(0)} + \lambda^{a_1 a_2} + \lambda^{(a_1} \varepsilon^{a_2) b} x_b + \\
&\qquad + \lambda \left(g^{a_1 a_2} x^2 - x^{a_1} x^{a_2} \right) ;
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
n = 3, \quad F_2^{a_1 a_2 a_3} &= g^{(a_1 a_2} F_2^{a_3)} + \lambda_{(0,0)}^{a_1 a_2 a_3} + \lambda_{(0,1)}^{(a_1 a_2} \varepsilon^{a_3) b} x_b + \\
&+ \lambda_{(0,2)}^{(a_1} \left(g^{a_2 a_3)} x^2 - x^{a_2} x^{a_3)} \right) + \lambda_{(0,3)} x^{(a_1} x^{a_2} \times \\
&\times \varepsilon^{a_3) b} x_b ;
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
n = 4, \quad F_2^{a_1 a_2 a_3 a_4} &= g^{(a_1 a_2} F_2^{a_3 a_4)} + \lambda_{(0,0)}^{a_1 a_2 a_3 a_4} + \\
&+ \lambda_{(0,1)}^{(a_1 a_2 a_3} \varepsilon^{a_4) b} x_b + \lambda_{(0,2)}^{(a_1 a_2} \left(x^{a_3} x^{a_4)} - g^{a_3 a_4)} x^2 \right) + \\
&+ \lambda_{(0,4)} \left(x^{(a_1} x^{a_2} x^{a_3} x^{a_4)} - 2 x^{(a_1} x^{a_2} g^{a_3 a_4)} + \right. \\
&\left. + x^4 g^{(a_1 a_2} g^{a_3 a_4)} \right) ;
\end{aligned} \tag{49}$$

$$m = 3$$

$$\begin{aligned}
&n = 0, \quad F_3^{(0)} = \lambda_3 ; \\
&n = 1, \quad F_3^{a} = \lambda^{a} + \lambda^{b} \varepsilon^{abc} x_c ; \\
&n = 2, \quad F_3^{a_1 a_2} = g^{a_1 a_2} F_3^{(0)} + \lambda_{(0,0)}^{a_1 a_2} + \lambda_{(0,1)}^{b (a_1} \varepsilon^{a_2) bc} x_c + \\
&\qquad + \lambda_{(0,2)}^{a_1 a_2} x^2 - 2 \lambda_{(0,2)}^{b_1 (a_1} x^{a_2)} x_{b_1} + \lambda_{(0,2)}^{b_1 b_2} x_{b_1} x_{b_2} g^{a_1 a_2} + \\
&\qquad + \lambda_{(1,0)}^{(a_1} x^{a_2)} - \lambda_{(1,0)}^{b_1} x_{b_1} g^{a_1 a_2} + \lambda_{(2,0)} x^{a_1} x^{a_2} - \\
&\qquad - \lambda_{(2,0)} g^{a_1 a_2} x^2
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
n = 3, \quad F_3^{a_1 a_2 a_3} &= g^{(a_1 a_2} F_3^{a_3)} + \lambda_{(0,0)}^{a_1 a_2 a_3} + \lambda_{(0,1)}^{b (a_1 a_2} \varepsilon^{a_3) bc} x_c + \\
&+ \lambda_{(0,2)}^{a_1 a_2 a_3} x^2 - 2 \lambda_{(0,2)}^{b (a_1 a_2} x^{a_3)} x_b + \lambda_{(0,2)}^{b_1 b_2 (a_1} g^{a_2 a_3)} x_{b_1} x_{b_2} + \\
&+ \lambda_{(0,3)}^{b (a_1 a_2} \varepsilon^{a_3) bc} x_c x^2 - 2 \lambda_{(0,3)}^{bd (a_1} x^{a_2} \varepsilon^{a_3) bc} x_c x_d + \\
&+ \lambda_{(0,3)}^{d b_1 b_2} g^{(a_1 a_2} \varepsilon^{a_3) dc} x_c x_{b_1} x_{b_2} + \lambda_{(1,0)}^{(a_1 a_2} x^{a_3)} -
\end{aligned}$$

$$-\lambda^{b(a_1}_{(1,0)} g^{a_2a_3)} x_b + \lambda^{b(a_1}_{(1,1)} x^{a_2} \varepsilon^{a_3)bc} x_c + \lambda^{(a_1}_{(2,0)} x^{a_2} x^{a_3)} -$$

$$-\lambda^{bd}_{(1,1)} g^{(a_1a_2} \varepsilon^{a_3)bc} x_c x_d + \lambda^{b}_{(2,1)} x^{(a_1} x^{a_2} \varepsilon^{a_3)bc} x_c -$$

$$-\lambda^{(a_1}_{(2,0)} g^{a_2a_3)} x^2 - \lambda^{b}_{(2,1)} g^{(a_1a_2} \varepsilon^{a_3)bc} x_c x^2 ;$$

$n=4$, $$F_3^{a_1a_2a_3a_4} = g^{(a_1a_2} F_3^{a_3a_4)} + \lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{(0,0)} + \lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{(0,2)} x^2 +$$

$$+\lambda^{b(a_1a_2a_3}_{(0,1)} \varepsilon^{a_4)bc} x_c - 2\lambda^{b(a_1a_2a_3}_{(0,2)} x^{a_4)} x_b +$$

$$+\lambda^{b_1b_2(a_1a_2}_{(0,2)} g^{a_3a_4)} x_{b_1} x_{b_2} + \lambda^{b(a_1a_2a_3}_{(0,3)} \varepsilon^{a_4)bc} x_c x^2 -$$

$$-2\lambda^{bd(a_1a_2}_{(0,3)} x^{a_3} \varepsilon^{a_4)bc} x_c x_d + \lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{(0,4)} x^4 +$$

$$+\lambda^{db_1b_2(a_1}_{(0,3)} g^{a_3a_2} \varepsilon^{a_4)dc} x_c x_{b_1} x_{b_2} - 4\lambda^{b(a_1a_2a_3}_{(0,4)} x^{a_4)} x_b x^2 +$$

$$+4\lambda^{b_1b_2(a_1a_2}_{(0,4)} x^{a_3} x^{a_4)} x_{b_1} x_{b_2} + 2\lambda^{b_1b_2(a_1a_2}_{(0,4)} g^{a_3a_4)} x_{b_1} x_{b_2} x^2 -$$

$$-4\lambda^{b_1b_2b_3(a_1}_{(0,4)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x_{b_1} x_{b_2} x_{b_3} + \lambda^{(a_1a_2a_3}_{(1,0)} x^{a_4)} + \qquad (51)$$

$$+\lambda^{b_1b_2b_3b_4}_{(0,4)} x_{b_1} x_{b_2} x_{b_3} x_{b_4} g^{(a_1a_2} g^{a_3a_4)} -$$

$$-\lambda^{b(a_1a_2}_{(1,0)} g^{a_3a_4)} x_b + \lambda^{b(a_1a_2}_{(1,1)} x^{a_3} \varepsilon^{a_4)bc} x_c -$$

$$-\lambda^{bd(a_1}_{(1,1)} g^{a_2a_3} \varepsilon^{a_4)bc} x_c x_d + \lambda^{(a_1a_2a_3}_{(1,2)} x^{a_4)} x^2 -$$

$$-\lambda^{b(a_1a_2}_{(1,2)} g^{a_3a_4)} x_b x^2 - 2\lambda^{b(a_1a_2}_{(1,2)} x^{a_3} x^{a_4)} x_b +$$

$$+3\lambda^{b_1b_2(a_1}_{(1,2)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x_{b_1} x_{b_2} + \lambda^{(a_1a_2}_{(2,0)} x^{a_3} x^{a_4)} -$$

$$-\lambda^{b_1b_2b_3}_{(1,2)} x_{b_1} x_{b_2} x_{b_3} g^{(a_1a_2} g^{a_3a_4)} - \lambda^{(a_1a_2}_{(2,0)} g^{a_3a_4)} x^2 +$$

$$+\lambda^{b(a_1}_{(2,1)} x^{a_2} x^{a_3} \varepsilon^{a_4)bc} x_c - \lambda^{b(a_1}_{(2,1)} g^{a_2a_3} \varepsilon^{a_4)bc} x_c x^2 +$$

$$+\lambda^{(a_1a_2}_{(2,2)} x^{a_3} x^{a_4)} x^2 - 2\lambda^{b(a_1}_{(2,2)} x^{a_2} x^{a_3} x^{a_4)} x_b +$$

$$+\lambda^{b_1b_2}_{(2,2)} x_{b_1} x_{b_2} x^{(a_1} x^{a_2} g^{a_3a_4)} - \lambda^{(a_1a_2}_{(2,2)} g^{a_3a_4)} x^4 +$$

$$+2\lambda^{b(a_1}_{(2,2)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x_b x^2 + \lambda^{(a_1}_{(3,0)} x^{a_2} x^{a_3} x^{a_4)} -$$

$$-\lambda^{b_1b_2}_{(2,2)} x_{b_1} x_{b_2} x^2 g^{(a_1a_2} g^{a_3a_4)} - \lambda^{(a_1}_{(3,0)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x^2 -$$

$$-\lambda^{b_1}_{(3,0)} x_{b_1} x^{(a_1} x^{a_2} g^{a_3a_4)} + \lambda^{b_1}_{(3,0)} x_{b_1} x^2 g^{(a_1a_2} g^{a_3a_4)} +$$

$$+\lambda_{(4,0)} x^{(a_1} x^{a_2} x^{a_3} x^{a_4)} - 2\lambda_{(4,0)} x^{(a_1} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x^2 +$$

$$+\lambda_{(4,0)} x^4 g^{(a_1a_2} g^{a_3a_4)} .$$

$m=4$

$n=0$, $F_4^{(0)} = \lambda$

$$n=1,\quad F_4^{a} = \lambda^{a}_{(0,0,0)} + \lambda^{[a d_1]}_{(0,0,1)} x_{d_1} ,$$

$$\begin{aligned}
n=2,\quad F_4^{a_1a_2} = {} & g^{a_1a_2} F_4^{(0)} + \lambda^{a_1a_2}_{(0,0,0)} + \lambda^{(a_1[a_2d_1])}_{(0,0,1)} x_{d_1} + \\
& + \lambda^{[a_1d_1][a_2d_2]}_{(0,0,2)} x_{d_1} x_{d_2} + \lambda^{a_1a_2}_{(0,1,0)} x^2 - \\
& - 2\lambda^{b(a_1}_{(0,1,0)} x^{a_2)} x_b + \lambda^{b_1b_2}_{(0,1,0)} x_{b_1} x_{b_2} g^{a_1a_2} + \\
& + \lambda^{(a_1}_{(1,0,0)} x^{a_2)} - \lambda^{b}_{(1,0,0)} x_b g^{a_1a_2} + \lambda_{(2,0,0)} x^{a_1} x^{a_2} - \\
& - \lambda_{(2,0,0)} g^{a_1a_2} x^2 ;
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
n=3,\quad F_4^{a_1a_2a_3} = {} & g^{(a_1a_2} F_4^{a_3)} + \lambda^{a_1a_2a_3}_{(0,0,0)} + \lambda^{(a_1a_2[a_3d_1])}_{(0,0,1)} x_{d_1} + \\
& + \lambda^{(a_1[a_2d_1][a_3d_2])}_{(0,0,2)} x_{d_1} x_{d_2} + \lambda^{[a_1d_1][a_2d_2][a_3d_3]}_{(0,0,3)} \times \\
& \times x_{d_1} x_{d_2} x_{d_3} - 2\lambda^{b_1(a_1a_2}_{(0,1,0)} x^{a_3)} x_{b_1} + \\
& + \lambda^{a_1a_2a_3}_{(0,1,0)} x^2 + \lambda^{b_1b_2(a_1}_{(0,1,0)} g^{a_2a_3)} x_{b_1} x_{b_2} + \\
& + \lambda^{(a_1a_2[a_3d_1])}_{(0,1,1)} x^2 x_{d_1} - 2\lambda^{b_1(a_1[a_2d_1]}_{(0,1,1)} x^{a_3)} x_{b_1} x_{d_1} + \\
& + \lambda^{b_1b_2([a_1d_1]}_{(0,1,1)} g^{a_2a_3)} x_{b_1} x_{b_2} x_{d_1} + \lambda^{(a_1a_2}_{(1,0,0)} x^{a_3)} - \\
& - \lambda^{b_1(a_1}_{(1,0,0)} g^{a_2a_3)} x_{b_1} + \lambda^{(a_1[a_2d_1]}_{(1,0,1)} x^{a_3)} x_{d_1} - \\
& - \lambda^{b_1([a_1d_1]}_{(1,0,1)} g^{a_2a_3)} x_{b_1} x_{d_1} + \lambda^{(a_1}_{(2,0,0)} x^{a_2} x^{a_3)} - \\
& - \lambda^{(a_1}_{(2,0,0)} g^{a_2a_3)} x^2 + \lambda^{([a_1d_1]}_{(2,0,1)} x^{a_2} x^{a_3)} x_{d_1} - \\
& - \lambda^{([a_1d_1]}_{(2,0,1)} g^{a_2a_3)} x^2 x_{d_1} ;
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
n=4,\quad F_4^{a_1a_2a_3a_4} = {} & g^{(a_1a_2} F_4^{a_3a_4)} + \lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{(0,0,0)} + \lambda^{(a_1a_2a_3[a_4d_1])}_{(0,0,1)} x_{d_1} + \\
& + \lambda^{(a_1a_2[a_3d_1][a_4d_2])}_{(0,0,2)} x_{d_1} x_{d_2} + \lambda^{(a_1[a_2d_1][a_3d_2][a_4d_3])}_{(0,0,3)} \times \\
& \times x_{d_1} x_{d_2} x_{d_3} + \lambda^{([a_1d_1][a_2d_2][a_3d_3][a_4d_4])} x_{d_1} x_{d_2} x_{d_3} x_{d_4} + \\
& + \lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{(0,1,0)} x^2 - 2\lambda^{b_1(a_1a_2a_3}_{(0,1,0)} x^{a_4)} x_{b_1} + \\
& + \lambda^{b_1b_2(a_1a_2}_{(0,1,0)} g^{a_3a_4)} x_{b_1} x_{b_2} + \lambda^{(a_1a_2a_3[a_4d_1])}_{(0,1,1)} x^2 x_{d_1} - \\
& - 2\lambda^{b_1(a_1a_2[a_3d_1]}_{(0,1,1)} x^{a_4)} x_{b_1} x_{d_1} + \lambda^{b_1b_2(a_1[a_2d_1]}_{(0,1,1)} g^{a_3a_4)} \times \\
& \times x_{b_1} x_{b_2} x_{d_1} + \lambda^{(a_1a_2[a_3d_1][a_4d_2])}_{(0,1,2)} x^2 x_{d_1} x_{d_2} - \\
& - 2\lambda^{b_1(a_1[a_2d_1][a_3d_2]} x^{a_4)} x_{b_1} x_{d_1} x_{d_2} +
\end{aligned}$$

$$+\lambda^{b_1b_2([a_1d_1][a_2d_2]}_{(0,1,2)} g^{a_3a_4)} x_{b_1}x_{b_2}x_{d_1}x_{d_2} + \lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{(0,2,0)} x^4 -$$

$$-4\lambda^{b_1(a_1a_2a_3}_{(0,2,0)} x^{a_4)} x^2 x_{b_1} + 4\lambda^{b_1b_2(a_1a_2}_{(0,2,0)} x^{a_3}x^{a_4)} x_{b_1}x_{b_2} +$$

$$+2\lambda^{b_1b_2(a_1a_2}_{(0,2,0)} g^{a_3a_4)} x^2 x_{b_1}x_{b_2} - 4\lambda^{b_1b_2b_3(a_1}_{(0,2,0)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} \times$$

$$\times x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3} + g^{(a_1a_2}g^{a_3a_4)}\lambda^{b_1b_2b_3b_4}_{(0,2,0)} x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3}x_{b_4} +$$

$$+\lambda^{(a_1a_2a_3}_{(1,0,0)} x^{a_4)} - \lambda^{b_1a_1a_2}_{(1,0,0)} g^{a_3a_4)} x_{b_1} + \lambda^{(a_1a_2[a_3d_1]}_{(1,0,1)} x^{a_4)} x_{d_1}$$

$$-\lambda^{b_1(a_1[a_2d_2]}_{(1,0,1)} g^{a_3a_4)} x_{b_1}x_{d_1} + \lambda^{(a_1[a_2d_1][a_3d_2]}_{(1,0,2)} x^{a_4)} x_{d_1}x_{d_2} \tag{54}$$

$$-\lambda^{b_1([a_1d_1][a_2d_2]}_{(1,0,2)} g^{a_3a_4)} x_{b_1}x_{d_1}x_{d_2} +$$

$$+\lambda^{(a_1a_2a_3}_{(1,1,0)} x^{a_4)} x^2 - \lambda^{b_1(a_1a_2}_{(1,1,0)} g^{a_3a_4)} x_{b_1} x^2 -$$

$$-2\lambda^{b_1(a_1a_2}_{(1,1,0)} x^{a_3}x^{a_4)} x_{b_1} + 3\lambda^{b_1b_2(a_1}_{(1,1,0)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x_{b_1}x_{b_2}$$

$$-\lambda^{b_1b_2b_3}_{(1,1,0)} g^{(a_1a_2}g^{a_3a_4)} x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3} + \lambda^{(a_1a_2}_{(2,0,0)} x^{a_3}x^{a_4}$$

$$-\lambda^{(a_1a_2}_{(2,0,0)} g^{a_3a_4)} x^2 + \lambda^{(a_1[a_2d_1]}_{(2,0,1)} x^{a_3}x^{a_4)} x_{d_1} -$$

$$-\lambda^{(a_1[a_2d_1]}_{(2,0,1)} g^{a_3a_4)} x^2 x_{d_1} + \lambda^{([a_1d_1][a_2d_2]}_{(2,0,2)} x^{a_3}x^{a_4)} x_{d_1}x_{d_2} -$$

$$-\lambda^{([a_1d_1][a_2d_2]}_{(2,0,2)} g^{a_3a_4)} x^2 x_{d_1}x_{d_2} + \lambda^{(a_1a_2}_{(2,1,0)} x^{a_3}x^{a_4)} x^2 -$$

$$-2\lambda^{b_1(a_1}_{(2,1,0)} x^{a_2}x^{a_3}x^{a_4)} x_{b_1} + \lambda^{b_1b_2}_{(2,1,0)} x^{(a_1}x^{a_2}g^{a_3a_4)} x_{b_1}x_{b_2} -$$

$$-\lambda^{(a_1a_2}_{(2,1,0)} g^{a_3a_4)} x^4 + 2\lambda^{b_1(a_1}_{(2,1,0)} x^{a_2} g^{a_3a_4)} x^2 x_{b_1} -$$

$$-\lambda^{b_1b_2}_{(2,1,0)} g^{(a_1a_2}g^{a_3a_4)} x^2 x_{b_1}x_{b_2} + \lambda^{(a_1}_{(3,0,0)} x^{a_2}x^{a_3}x^{a_4)} -$$

$$-\lambda^{b_1}_{(3,0,0)} x^{(a_1}x^{a_2}g^{a_3a_4)} x_{b_1} - \lambda^{(a_1}_{(3,0,0)} x^{a_2} g^{a_3a_4} x^2 +$$

$$+\lambda^{b_1}_{(3,0,0)} g^{(a_1a_2}g^{a_3a_4)} x^2 x_{b_1} + \lambda_{(4,0,0)} x^{a_1}x^{a_2}x^{a_3}x^{a_4} -$$

$$-2\lambda_{(4,0,0)} x^{(a_1}x^{a_2}g^{a_3a_4)} x^2 + \lambda_{(4,0,0)} g^{(a_1a_2}g^{a_3a_4)} x^4 .$$

Подставляя (47)-(54) в (6), (7) и перенося операторы дифференцирования вправо, получаем явный вид соответствующих операторов симметрии. Так, для $n=1$ имеем полный набор операторов симметрии следующего вида:

$$Q_1^a = p_a = i\frac{\partial}{\partial x^a}\ , \qquad Q_1^{ab} = J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a\ . \tag{55}$$

Явный вид операторов симметрии для $n>1$ не приводим ввиду крайней громоздкости соответствующих формул (этот вид фактически задан соотношениями (6), (7), (47)-(54)).

Операторы симметрии первого порядка Q_1, приведенные в (55), образуют алгебру Ли $AP(p,q)$, удовлетворяя следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}[p_a, p_b] = 0\ , \quad [p_a, J_{bc}] = i(g_{ab}p_c - g_{ac}p_b)\ ,\\ [J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{ac}J_{bd} + g_{bd}J_{ac} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac})\ .\end{gathered} \tag{56}$$

Используя представление (36), нетрудно заметить, что операторы симметрии произвольного порядка являются полиномами от операторов (55). Иными словами, все операторы симметрии конечного порядка уравнения (1) принадлежат обертывающей алгебре алгебры $AP(p,q)$.

§ 6. Явный вид конформного тензора Киллинга произвольного ранга j

Вычисление конформных тензоров Киллинга ранга j (т.е. построение общего решения уравнений (14)) может быть проведено по аналогии с изложенным выше в §§ 3-5. Построение такого решения упрощает использование результата, сформулированного в следующей лемме.

Лемма 2. Пусть $F^{a_1a_2\ldots a_{j_0}}$ – произвольное решение системы (14) для $j=j_0$, а F^a – решение этой системы для $j=1$. Тогда функция

$$F^{a_1a_2\ldots a_{j_0+1}} = \left[F^{(a_1a_2\ldots a_{j_0}}F^{a_{j_0+1})}\right]^{SL}\ , \tag{57}$$

где $[\cdot]^{SL}$ означает бесследовую часть тензора в квадратных скобках (см.(18)), является решением уравнений (14) для $j=j_0+1$.

Доказательство можно осуществить прямой проверкой.

Ниже приведено без доказательства общее решение уравнений (14) для $m\le 4$ и произвольного j.

С помощью рассуждений, аналогичных имеющимся в § 3, можно показать, что в двумерном пространстве уравнения (14) сводятся к уравнениям Коши-Римана, и соответствующие операторы симметрии определяются с точностью до произвольных аналитических функций, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $F^{a_1a_2\ldots a_j}$ (таких компонент две при $j\ne 0$ и одна при $j=0$, т.е. когда тензор $F^{a_1a_2\ldots a_j}$ сводится к скаляру).

Для $m=3$ количество независимых решений уравнений (14) равно

$$N_j^3 = \frac{1}{3}(j+1)(2j+1)(2j+3)\ . \tag{58}$$

Решения нумеруются парой целых чисел $c=(c_1,c_2)$, удовлетворяющих условиям

$$0\le c_1\le j\ , \quad 0\le c_2\le 2c_1\ , \tag{59}$$

и содержат при каждом c_1 $(2c_1+1)$ произвольных параметров, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $\lambda^{a_1a_2\ldots a_{c_1}}$ ранга c_1. Явный вид соответствующих решений задается формулой

$$F_{(c_1,c_2)}^{a_1a_2\ldots a_j} = \left[\varepsilon_{c_2} f_{(c_1c_2)}^{a_1a_2\ldots a_j} + (1-\varepsilon_{c_2}) f_{(c_1c_2)}^{b(a_1a_2\ldots a_{j-1}}\varepsilon^{a_j)bc}x_c\right]^{SL}, \tag{60}$$

где

$$f_{(c_1c_2)}^{a_1a_2\ldots a_j} = \sum_{m=0}^{\{\frac{c_2}{2}\}}(-2)^m C_{\{\frac{c_2}{2}\}}^m \lambda_{c_1c_2}^{b_1b_2\ldots b_m(a_1a_2\ldots a_{c_1-m}} \times$$

$$\times x^{a_{c_1-m+1}} x^{a_{c_1-m+2}} \ldots x^{a_j)} x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_m} x^{2(\{\frac{c_2}{2}\}-m)} , \qquad (61)$$

а символ $[\cdot]^{SL}$ означает бесследовую часть соответствующего тензора; см. (18) для $m=3$.

Для $m=4$ число независимых решений уравнений (14) равно

$$N_j^4 = \frac{1}{12}(j+1)^2(j+2)^2(2j+3) . \qquad (62)$$

Решения нумеруются тройкой целых чисел $c=(c_1, c_2, c_3)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \le c_1 \le j , \quad -c_1 \le c_2 \le c_1 , \quad 0 \le c_3 \le \left\{ \frac{c_1-|c_2|}{2} \right\} , \qquad (63)$$

и содержат при каждом c N_c произвольных параметров, где

$$N_c = \begin{cases} (c_1+1)^2 , & c_1 = |c_2| \\ 2(|c_2|+2c_3+1)(2c_1-|c_2|-2c_3+1) , & c_1 \ne |c_2| . \end{cases} \qquad (64)$$

Эти параметры задают независимые компоненты неприводимого тензора ранга $R = R_1 + 2R_2$, где

$$R_1 = |c_2| + 2c_3 , \quad R_2 = c_1 - |c_2| - 2c_3 , \qquad (65)$$

явные выражения для соответствующих решений имеют вид

$$F_c^{(a_1 a_2 \ldots a_j)} = \Big[\sum_{i=0}^{m+c_3} (-1)^i C^i_{m+c_3} (x^2)^i \times$$

$$\times \lambda^{b_1 b_2 \ldots b_{m-i+c_3} (a_1 a_2 \ldots a_{|c_2|-m+i+c_3} [a_{|c_2|+i-m+1+c_3} d_1] \ldots [a_{c_1-m+i-c_3} d_{c_1-|c_2|-2c_3}]} \times$$

$$\times x^{a_{c_1-m+i-c_3+1}} x^{a_{c_1-m+i-c_3+2}} \ldots x^{a_j)} x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_{m-i+c_3}} \times \qquad (66)$$

$$\times x_{d_1} x_{d_2} \ldots x_{d_{c_1-|c_2|-2c_3}} \Big]^{SL} .$$

Здесь $\lambda^{b_1 \ldots b_{m-i+c_3} a_1 \ldots a_{|c_2|-m+i+c_3} [a_{|c_2|+i-m+1+c_3} d_1] \ldots [a_{c_1-m+i-c_3} d_{c_1-|c_2|-2c_3}]}$ – произвольный неприводимый тензор ранга $R_1 + 2R_2$ (R_1 и R_2 заданы в (65)),

$$m = \begin{cases} -c_2 , & c_2 < 0 , \\ 0 , & c_2 \ge 0 , \end{cases} \qquad (67)$$

$C^i_{m+c_3}$ – число сочетаний из $m+c_3$ элементов по i , а символ $[\cdot]^{SL}$ обозначает бесследовую часть соответствующего тензора, см. (18), (19) для $m=4$. По индексам $a_1 \ldots a_j$ в правой части (66) подразумевается симметризация (т.е. сумма по всем возможным перестановкам).

Таким образом, мы нашли явный вид конформного тензора ранга j для $m \le 4$. Формула (66) определяет общий вид такого тензора для произвольных $m > 3$, но при этом общее количество независимых решений уравнений (14) уже не определяется, вообще говоря, соотношением (62), но требует специального подсчета для каждого значения m .

Отметим, что общее решение уравнений (14) для $m > 2$ может быть представлено в виде

$$F^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \Big[\sum_{l,k=0}^{j} \sum_{i=0}^{j-l-k} \lambda^{b_1 b_2 \ldots b_{j-l-k-i} (a_1 a_2 \ldots a_{l+i} [a_{l+i+1} d_1] \ldots [a_{l+i+k} d_k]} \times \qquad (68)$$

$$\times (-1)^i C^i_{j-l-k} (x^2)^i x^{a_{l+k+i+1}} \ldots x^{a_j)} x_{d_1} x_{d_2} \ldots x_{d_k} x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_{j-l-k-i}} ,$$

где $\lambda^{b_1 b_2 \ldots b_{j-l-k-i} a_1 \ldots a_{l+i} [a_{l+i+1} d_1] \ldots [a_{l+i+k} d_k]}$ – тензор, симметричный относительно перестановки индексов $b_1 \ldots a_{l+i+k}$ и антисимметричный относительно перестановок индексов a_{l+i+f} с d_f , $f=1,2,\ldots k$, причем свертка этого тензора по любым трем индексам с абсолютно антисимметричным тензором равна нулю. Разлагая такой тензор на неприводимые, приходим к формулам (58)-(67), задающим решения уравнений (14) для $m=3,4$.

§ 7. Примеры решений и операторов симметрии для $n \le 3$

Выпишем явный вид полученных решений и соответствующих операторов симметрии для $m \le 4$ и $n \le 3$. Числа этих решений, согласно (58), (62) даны в табл.2.

Таблица 2. Количество независимых решений уравнений (14)

m \ j	1	2	3
3	10	35	84
4	15	84	300

Числа соответствующих операторов симметрии порядка n получаем, суммируя числа решений от $j=0$ до $j=n$. Результат также приведем в виде табл. 3.

Таблица 3. Количество операторов симметрии порядка n уравнения (1) с $\varkappa=0$ в m -мерном пространстве

m \ n	0	1	2	3	4
3	1	11	46	130	295
4	1	16	100	400	1225

Для $m=2$ количество решений уравнений (14) (и соответствующих операторов симметрии) бесконечно, так как они определяются с точностью до произвольных функций.

Явные выражения всех независимых решений уравнений (14) для $m\leq 4$, $n\leq 3$ задаются следующими формулами ($F^{(j)}=F^{(a_1a_2\ldots a_j)}$):

$m=2$

$$j=0 \quad F^{(0)}=\varphi^0(x_1,x_2) \tag{69}$$

$$j>0 \quad F^{11\ldots 1}=(\varphi_j+\varphi_j^*)+i(\xi_j+\xi_j^*)$$

$$F^{11\ldots 12}=i(\varphi_j^*-\varphi_j)+\xi_j-\xi_j^*$$

Здесь φ_j и ξ_j - произвольные аналитические функции от

двух переменных x_1 , x_2 , остальные компоненты тензора $F^{a_1a_2\ldots a_j}$ выражаются через (69) с использованием свойств бесследовости и симметричности.

$m=3$

$$j=0, \quad F^{(0)}=\lambda;$$

$$j=1, \quad F^a_{(0,0)}=\lambda_{(0,0)}x^a; \quad F^a_{(1,0)}=\lambda^a_{(1,0)}; \quad F^a_{(1,1)}=\varepsilon_{abc}\lambda^b_{(1,1)}x^c; \tag{70}$$

$$F^a_{(1,2)}=2\lambda^b_{(1,2)}x_b x^a-\lambda^a_{(1,2)}x^2;$$

$$j=2, \quad F^{a_1a_2}_{(0,0)}=\lambda_{(0,0)}\left(x^{a_1}x^{a_2}-\frac{1}{3}g^{a_1a_2}x^2\right);$$

$$F^{a_1a_2}_{(1,0)}=\lambda^{a_1}_{(1,0)}x^{a_2}+\lambda^{a_2}_{(1,0)}x^{a_1}-\frac{2}{3}g^{a_1a_2}\lambda^b_{(1,0)}x_b;$$

$$F^{a_1a_2}_{(1,1)}=(x^{a_1}\varepsilon^{a_2}{}_{bc}+x^{a_2}\varepsilon^{a_1}{}_{bc})x^b\lambda^c_{(1,1)};$$

$$F^{a_1a_2}_{(1,2)}=(x^{a_1}\lambda^{a_2}_{(1,2)}+x^{a_2}\lambda^{a_1}_{(1,2)})x^2-4x^{a_1}x^{a_2}\lambda^b_{(1,2)}x_b+$$

$$+\frac{2}{3}g^{a_1a_2}\lambda^b_{(1,2)}x_b x^2;$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,0)}=\lambda^{a_1a_2}_{(2,0)}, \tag{71}$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,1)}=(\varepsilon^{a_1bc}\lambda^{ba_2}_{(2,1)}+\varepsilon^{a_2bc}\lambda^{ba_1}_{(2,1)})x_c;$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,2)}=\lambda^{a_1a_2}_{(2,2)}x^2-(x^{a_1}\lambda^{a_2b}_{(2,2)}+x^{a_2}\lambda^{a_1b}_{(2,2)})x_b+\frac{2}{3}g^{a_1a_2}\lambda^{bc}_{(2,2)}x_b x_c,$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,3)}=2(x^{a_1}\varepsilon^{a_2}{}_{bk}+x^{a_2}\varepsilon^{a_1}{}_{bk})\lambda^{kd}_{(2,3)}x^b x_d-$$

$$-(\varepsilon^{a_1}{}_{ck}\lambda^{a_2k}_{(2,3)}+\varepsilon^{a_2}{}_{ck}\lambda^{a_1k}_{(2,3)})x^c x^2;$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,4)}=\lambda^{a_1a_2}_{(2,4)}x^4-2(x^{a_1}\lambda^{2c}_{(2,4)}+x^{a_2}\lambda^{a_1c}_{(2,4)})x_c x^2+4x^{a_1}x^{a_2}\lambda^{ca}_{(2,4)}x_c x_d,$$

$$j=3,\quad F^{a_1a_2a_3}_{(0,0)} = \lambda_{(0,0)}\left(x^{a_1}x^{a_2}x^{a_3} - \frac{1}{10} g^{(a_1a_2}x^{a_3)}x^2\right);$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(1,0)} = \lambda^{(a_1}_{(1,0)} x^{a_2}x^{a_3)} - \frac{1}{5}\left(g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)}_{(1,0)}x^2 + 2g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{b}_{(1,0)}x_b\right);$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(1,1)} = x^{(a_1}x^{a_2}\varepsilon^{a_3)}{}_{bc}\,x^b\lambda^c_{(1,1)} - \frac{1}{5} g^{(a_1a_2}\varepsilon^{a_3)}{}_{bc}\,x^b\lambda^c_{(1,1)};$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,0)} = \lambda^{(a_1a_2}_{(2,0)}x^{a_3)} - \frac{2}{5} g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,0)}x_b;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,1)} = x^{(a_1}\varepsilon^{a_2}{}_{bc}\lambda^{a_3)c}_{(2,1)}x^b - \frac{1}{5} g^{(a_1a_2}\varepsilon^{a_3)}{}_{bc}\lambda^{cd}_{(2,1)}x^b x_d;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,2)} = \lambda^{(a_1a_2}_{(2,2)}x^{a_3)}x^2 - 2x^{(a_1}x^{a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,2)}x_b + \frac{4}{5} g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{bc}_{(2,2)}x_b x_c;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,3)} = \varepsilon^{(a_1}{}_{bc}\,x^{a_2}\left(2x^{a_3)}\lambda^{bd}_{(2,3)}x_d - \lambda^{a_3)b}_{(2,3)}x^2\right)x^c;$$

$$\begin{aligned}F^{a_1a_2a_3}_{(2,4)} = {} & x^{(a_1}\left(\lambda^{a_2a_3)}_{(2,4)}x^4 - 4x^{a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,4)}x_b x^2 + \right.\\ & \left. + 4x^{a_2}x^{a_3)}\lambda^{kl}_{(2,4)}x_k x_l\right) - \frac{2}{5} g^{(a_1a_2}\left(x^{a_3)}\lambda^{kl}_{(2,4)}x_k x_l x^2 - \right.\\ & \left. - \lambda^{a_3)b}x_b x^4\right);\end{aligned} \qquad (72)$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,0)} = \lambda^{a_1a_2a_3}_{(3,0)};$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,1)} = \varepsilon^{(a_3}{}_{bc}\lambda^{a_1a_2)b}x^c;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,2)} = \lambda^{(a_1a_2a_3)}_{(3,2)}x^2 - 2x^{(a_3}\lambda^{a_1a_2)b}_{(3,2)}x_b + \frac{4}{5} g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)bc}_{(3,2)}x_b x_c;$$

$$\begin{aligned}F^{a_1a_2a_3}_{(3,3)} = {} & \varepsilon^{(a_1}{}_{bc}\left(\lambda^{a_2a_3)b}_{(3,3)}x^2 - 2x^{a_2}\lambda^{a_3)bc}_{(3,3)}x_b x_c + \right.\\ & \left. + \frac{2}{5} g^{a_2a_3)}\lambda^{bcd}_{(3,3)}x_b x_c x_d\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{a_1a_2a_3}_{(3,4)} = {} & \lambda^{(a_1a_2a_3)}_{(3,4)}x^4 - 4x^{(a_1}\left(\lambda^{a_2a_3)c}_{(3,4)}x_c x^2 - x^{a_2}\lambda^{a_3)bc}_{(3,4)}x_b x_c\right) - \\ & - \frac{4}{5} g^{(a_1a_2}\left(2x^{a_3)}\lambda^{bcd}_{(3,4)}x_d - \lambda^{a_3)bc}_{(3,4)}x^2\right)x_b x_c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{a_1a_2a_3}_{(3,5)} = {} & \varepsilon^{(a_1}{}_{bc}\left(\lambda^{a_3a_2)b}_{(3,5)}x^4 - 4x^{a_2}\lambda^{a_3)bd}_{(3,5)}x_d x^2 + \right.\\ & \left. + 4x^{a_2}x^{a_3)}\lambda^{bkl}_{(3,5)}x_k x_l\right)x^c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{a_1a_2a_3}_{(3,6)} = {} & \lambda^{(a_1a_2a_3)}_{(3,6)}x^6 - 6x^{(a_1}\lambda^{a_2a_3)c}_{(3,6)}x_c x^4 + \\ & + 12x^{(a_1}x^{a_2}\lambda^{a_3)bc}_{(3,6)}x_b x_c x^2 - 8x^{(a_1}x^{a_2}x^{a_3)}\lambda^{bcd}_{(3,6)}x_b x_c x_d,\end{aligned}$$

$m=4$

$$j=0,\quad F^{(0)} = \lambda,$$

$$j=1,\quad F^{a}_{(0,0,0)} = \lambda x^a;$$

$$F^{a}_{(1,-1,0)} = \lambda^b x^a x_b - \lambda^a x^2;$$

$$F^{a}_{(1,0,0)} = \lambda^{[ad]}x_d;$$

$$F^{a}_{(1,1,0)} = \lambda^a; \qquad (73)$$

$$j=2,\quad F^{a_1a_2}_{(0,0,0)} = \lambda_{(0,0,0)}\left(x^{a_1}x^{a_2} - \frac{1}{4} g^{a_1a_2}x^2\right);$$

$$\begin{aligned}F^{a_1a_2}_{(1,-1,0)} = {} & 2\lambda^{b}_{(1,-1,0)}x_b\left(x^{a_1}x^{a_2} - \frac{1}{4} g^{a_1a_2}x^2\right) - \lambda^{a_1}_{(1,-1,0)}x^{a_2}x^2 - \\ & - \lambda^{a_2}_{(1,-1,0)}x^{a_1}x^2 + \frac{1}{2} g^{a_1a_2}\lambda^{c}_{(1,-1,0)}x_c x^2;\end{aligned}$$

$$F^{a_1a_2}_{(1,0,0)} = \lambda^{[a_1d_1]}_{(1,0,0)}x^{a_2}x_{d_1} + \lambda^{[a_2d_1]}_{(1,0,0)}x^{a_1}x_{d_1};$$

$$F^{a_1a_2}_{(1,1,0)} = -\frac{1}{2} g^{a_1a_2}\lambda^{c}_{(1,1,0)}x_c + \lambda^{a_1}_{(1,1,0)}x^{a_2} + \lambda^{a_2}_{(1,1,0)}x^{a_1};$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,-2,0)} = 2\lambda^{b_1b_2}_{(2,-2,0)} x^{a_1}x^{a_2}x_{b_1}x_{b_2} - 2\lambda^{b_1a_1}_{(2,-2,0)} x^{a_2}x^2x_{b_1} - 2\lambda^{b_1a_2}_{(2,-2,0)} x^{a_1}x^2x_{b_1} + 2\lambda^{a_1a_2}_{(2,-2,0)} x^4 + \frac{1}{2}g^{a_1a_2}\lambda^{b_1b_2}_{(2,-2,0)} x^2x_{b_1}x_{b_2},$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,-1,0)} = \lambda^{b_1[a_1d_1]}_{(2,-1,0)} x^{a_2}x_{b_1}x_{d_1} + \lambda^{b_1[a_2d_1]}_{(2,-1,0)} x^{a_1}x_{b_1}x_{d_1} - \lambda^{a_1[a_2d_1]}_{(2,-1,0)} x^2x_{d_1} - \lambda^{a_2[a_1d_1]}_{(2,-1,0)} x^2x_{d_1};$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,0,1)} = \lambda^{ba_1}_{(2,0,1)} x^{a_2}x_b + \lambda^{ba_2}_{(2,0,1)} x^{a_1}x_b - 2\lambda^{a_1a_2}_{(2,0,1)} x^2 - \frac{1}{2}g^{a_1a_2}\lambda^{bc}_{(2,0,1)} x_bx_c;$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,0,0)} = \lambda^{[a_1d_1][a_2d_2]}_{(2,0,0)} x_{d_1}x_{d_2}, \tag{74}$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,1,0)} = \left(\lambda^{a_1[a_2d]}_{(2,1,0)} + \lambda^{a_2[a_1d]}_{(2,1,0)}\right)x_d;$$

$$F^{a_1a_2}_{(2,2,0)} = \lambda^{a_1a_2}_{(2,2,0)},$$

$l=3$, $$F^{a_1a_2a_3}_{(0,0,0)} = \lambda_{(0,0,0)}\left(x^{(a_1}x^{a_2}x^{a_3)} - \frac{1}{2}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}x^2\right),$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(1,-1,0)} = \lambda^{b}_{(1,-1,0)}\left(x^{(a_1}x^{a_2}x^{a_3)} - \frac{1}{2}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}x^2\right)x_b - \lambda^{(a_1}_{(1,-1,0)} x^{a_2}x^{a_3)}x^2 + \frac{1}{3}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{b}_{(1,-1,0)} x_bx^2 + \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)}_{(1,-1,0)} x^4;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(1,0,0)} = \lambda^{([a_1d]}_{(1,0,0)} x^{a_2}x^{a_3)}x_d - \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{[a_3d])}_{(1,0,0)} x^2x_d;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(1,1,0)} = \lambda^{(a_1}_{(1,1,0)} x^{a_2}x^{a_3)} - \frac{1}{3}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{b}_{(1,1,0)} x_b - \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)}_{(1,1,0)} x^2;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,-2,0)} = \lambda^{b_1b_2}_{(2,-2,0)}\left(x^{(a_1}x^{a_2}x^{a_3)} - \frac{1}{2}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}x^2\right)x_{b_1}x_{b_2} - 2\lambda^{b(a_1}_{(2,-2,0)} x^{a_2}x^{a_3)}x_bx^2 + \frac{2}{3}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{bc}_{(2,-2,0)} x_bx_cx^2 + \frac{1}{3}g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,-2,0)} x_bx^4 + \lambda^{(a_1a_2}_{(2,-2,0)} x^{a_3)}x^4 - \frac{1}{3}g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,-2,0)} x_bx^4;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,-1,0)} = \lambda^{b([a_1d]}_{(2,-1,0)} x^{a_2}x^{a_3)}x_bx_d - \lambda^{(a_1[a_2d]}_{(2,-1,0)} x^{a_3)}x_dx^2 - \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{[a_3d])b}_{(2,-1,0)} x^2x_bx_d + \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{[a_3d])b}_{(2,-1,0)} x^2x_bx_d;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,0,0)} = \lambda^{([a_1d_1][a_2d_2]}_{(2,0,0)} x^{a_3)}x_{d_1}x_{d_2},$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,0,1)} = \lambda^{b(a_1}_{(2,0,1)} x^{a_2}x^{a_3)}x_b - \frac{1}{3}g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{bc}_{(2,0,1)} x_bx_c + \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,0,1)} x_bx^2 - \lambda^{(a_1a_2}_{(2,0,1)} x^{a_3)}x^2;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,1,0)} = \lambda^{(a_1[a_2d]}_{(2,1,0)} x^{a_3)}x_d - \frac{1}{6}g^{(a_1a_2}\lambda^{[a_3d])b}_{(2,1,0)} x_bx_d,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(2,2,0)} = \lambda^{(a_1a_2}_{(2,2,0)} x^{a_3)} - \frac{1}{3} g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b}_{(2,2,0)} x_b ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,-3,0)} = \lambda^{b_1b_2b_3}_{(3,-3,0)}\Big(x^{(a_1}x^{a_2}x^{a_3)} x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3} + \frac{1}{2} g^{(a_1a_2}x^{a_3)}x^2 x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3}\Big) - \lambda^{(a_1a_2a_3)}_{(3,-3,0)} x^6 - 3\lambda^{b_1b_2(a_1}_{(3,-3,0)} x^{a_2}x^{a_3)} x^2 x_{b_1}x_{b_2} + 3\lambda^{b_1(a_1a_2}_{(3,-3,0)} x^{a_3)} x^4 x_{b_1} - \frac{1}{2} g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b_1b_2}_{(3,-3,0)} x_{b_1}x_{b_2}x^4 ;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,-2,0)} = \lambda^{b_1b_2([a_1d]}_{(3,-2,0)} x^{a_2}x^{a_3)} x_{b_1}x_{b_2}x_d + \frac{1}{6} g^{(a_1a_2}\lambda^{[a_3d])b_1b_2}_{(3,-2,0)} x^2 x_{b_1}x_{b_2}x_d - 2\lambda^{b(a_1[a_2d]}_{(3,-2,0)} x^{a_3)} x_b x_d x^2 + \lambda^{(a_1a_2[a_3d])}_{(3,-2,0)} x_d x^4 , \tag{75}$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,-1,0)} = \lambda^{b([a_1d_1][a_2d_2]}_{(3,-1,0)} x^{a_3)} x_b x_{d_1}x_{d_2} - \lambda^{(a_1[a_2d_1][a_3d_2])}_{(3,-1,0)} x_{d_1}x_{d_2}x^2 ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,0,0)} = \lambda^{[a_1d_1][a_2d_2][a_3d_3]}_{(3,0,0)} x_{d_1}x_{d_2}x_{d_3} ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,0,1)} = \Big(\lambda^{b(a_1[a_2d]}_{(3,0,1)} x^{a_3)} - \frac{1}{6} g^{(a_1a_2}\lambda^{[a_3d])bc}_{(3,0,1)} x_c\Big) x_b x_d - \lambda^{(a_1a_2[a_3d_1])}_{(3,0,1)} x_{d_1} x^2 ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,-1,1)} = \Big(\lambda^{b_1b_2(a_1}_{(3,-1,1)} x^{a_2}x^{a_3)} - \frac{1}{3} g^{(a_1a_2}x^{a_3)}\lambda^{b_1b_2c}_{(3,-1,1)} x_c + \frac{1}{2} g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)b_1b_2}_{(3,-1,1)} x^2\Big) x_{b_1}x_{b_2} - 2\lambda^{b(a_1a_2}_{(3,-1,1)} x^{a_3)} x_b x^2 + \lambda^{(a_1a_2a_3)}_{(3,-1,1)} x^4 ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,1,0)} = \lambda^{(a_1[a_2d_1][a\ d_2]}_{(3,1,0)} x_{d_1}x_{d_2} ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,1,1)} = \lambda^{b(a_1a_2}_{(3,1,1)} x^{a_3)} x_b - \frac{1}{3} g^{(a_1a_2}\lambda^{a_3)bc}_{(3,1,1)} x_b x_c - \lambda^{(a_1a_2a_3)}_{(3,1,1)} x^2 ;$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,2,0)} = \lambda^{(a_1a_2[a_3d])}_{(3,2,0)} x_d ,$$

$$F^{a_1a_2a_3}_{(3,3,0)} = \lambda^{a_1a_2a_3}_{(3,3,0)}$$

Здесь $\lambda_{(\dots)}$, $\lambda^{a}_{(\dots)}$, $\lambda^{a_1a_2}_{(\dots)}$, $\lambda^{a_1a_2a_3}_{(\dots)}$ – произвольные симметричные бесследовые тензоры.

Формулы (69)-(75) задают явный вид всех линейно независимых конформных тензоров Киллинга ранга $j \le 3$ в пространствах размерности $p+q=2,3,4$ (для $p+q=2$ j произвольно). Для получения явного вида соответствующих операторов симметрии достаточно подставить (69)-(75) в (6), (7), т.е. выписать j -кратные антикоммутаторы $F^{a_1a_2\ldots a_j}$ с $\frac{\partial}{\partial x_{a_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{a_2}}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_{a_j}}$.

§ 8. Тензоры Киллинга ранга j и порядка S

До сих пор мы рассматривали решения уравнений (11) и (14), которые определяют тензоры Киллинга (и конформные тензоры Киллинга) произвольного ранга j, но только первого порядка. В этом параграфе получен явный вид тензоров Киллинга ранга j произвольного порядка S. Такие тензоры определяются как общие решения уравнений (16).

Система уравнений (16) переопределена, включая N_{js}^m уравнений для $\hat{N}_{js}^m$ неизвестных, где

$$N_{js}^m = C_{j+s+m-1}^{m-1}, \quad \hat{N}_{js}^m = C_{j+m-1}^{m-1}, \quad m = p+q. \tag{76}$$

Как это делалось выше в § 3, рассмотрим набор дифференциальных следствий исследуемой системы, получаемых K -кратным дифференцированием каждого члена уравнения по $\frac{\partial}{\partial x_{a_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{a_2}}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_{a_K}}$. Этот набор представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений следующего вида :

$$F^{(a_1a_2\ldots a_j,\, a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+s})\,b_1b_2\ldots b_K} = 0, \tag{77}$$

где в роли неизвестных выступают производные

$$F^{a_1a_2\ldots a_j,\, a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+s}\, b_1b_2\ldots b_K} \equiv$$
$$\equiv \partial^{a_{j+1}}\partial^{a_{j+2}}\ldots\partial^{a_{j+s}}\partial^{b_1}\partial^{b_2}\ldots\partial^{b_K} F^{a_1a_2\ldots a_j}. \tag{78}$$

Количества неизвестных N_H^K и уравнений N_y^K равны

$$N_H^K = C_{j+m-1}^{m-1}\, C_{K+S+m-1}^{m-1}; \quad N_y^K = C_{j+s+m-1}^{m-1}\, C_{K+m-1}^{m-1}, \tag{79}$$

так что снова выполняются условия (24).

Можно показать (см. дополнение), что система (77) невырождена, поэтому из (24) следует, что

$$F^{a_1a_2\ldots a_j,\, a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+s}\, b_1b_2\ldots b_j} \equiv 0.$$

Отсюда заключаем, что тензоры Киллинга ранга j и порядка S представляют собой полиномы порядка $j+S-1$. Из (77), (79) следует, что такой полином содержит n_{js}^m произвольных параметров, где

$$n_{js}^m = \sum_{i=0}^{S-1} C_{i+m-1}^{m-1}\, C_{j+m-1}^{m-1} + \sum_{K=0}^{S-1}(N_H^K - N_y^K) =$$
$$= \frac{S}{m}\, C_{j+m-1}^{m-1}\, C_{j+S+m-1}^{m-1}. \tag{80}$$

Здесь первая сумма задает число независимых решений, которые имеют порядок по x меньший, чем S. Такие решения можно записать в виде

$$F_i^{a_1a_2\ldots a_j} = \lambda^{a_1a_2\ldots a_j}_{b_1b_2\ldots b_i}\, x^{b_1}x^{b_2}\ldots x^{b_i}, \quad i < S, \tag{81}$$

где $\lambda^{a_1a_2\ldots a_j}_{b_1b_2\ldots b_i}$ – числовые параметры, на которые уравнения (77) не налагают никаких ограничений (разумеется, необходимым требованием является симметрия относительно перестановок индексов $a_\lambda \leftrightarrow a_{\lambda'}$, $b_\mu \leftrightarrow b_{\mu'}$, $\lambda, \lambda' = 1,2\ldots j$, $\mu, \mu' = 1,2\ldots i$.

В случае $S=1$ формула (80) сводится к (25).

В частности, для $m=2,3,4$ получаем из (80)

$$n_{js}^2 = \frac{1}{2}S(j+1)(j+S+1),$$

$$n_{js}^3 = \frac{1}{12}S(j+1)(j+2)(j+S+1)(j+S+2), \tag{82}$$

$$n_{js}^4 = \frac{1}{3!4!}S(j+1)(j+2)(j+3)(j+S+1)(j+S+2)(j+S+3)$$

Таким образом, мы определили количество линейно независимых тензоров Киллинга ранга j и порядка S. Для вычисления этих тензоров в явном виде используем следующие две леммы.

Лемма 3. Пусть $F^{a_1 a_2 \dots a_j}$ – тензор Киллинга ранга j и порядка S, а φ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi = 0 \quad , \quad \mu,\nu = 1,2,\dots m \quad . \tag{83}$$

Тогда функция

$$\tilde{F}^{a_1 a_2 \dots a_j} = \varphi\, F^{a_1 a_2 \dots a_j} \tag{84}$$

является тензором Киллинга ранга j и порядка S.

Доказательство сводится к прямой проверке утверждения леммы, которая заключается в $(S+1)$-кратном дифференцировании (84) по $\partial^{a_{j+1}}, \partial^{a_{j+2}}, \dots \partial^{a_{j+S+1}}$ и последующей симметризации полученного выражения по $a_1, a_2, \dots a_{j+S+1}$ с использованием соотношений (16), (83).

Лемма 4. Пусть $F^{a_1 a_2 \dots a_j}$ является тензором Киллинга ранга j и порядка S. Тогда свертка

$$\tilde{F}^{a_1 a_2 \dots a_{j-1}} = F^{a_1 a_2 \dots a_j} x_{a_j} \tag{85}$$

является тензором Киллинга порядка $S+1$ и ранга $j-1$.

Доказательство аналогично.

Приведенные леммы дают конструктивный рецепт построения тензоров Киллинга порядка S, исходя из найденных выше в § 4 тензоров Киллинга первого порядка. Единственная сложность применения этого рецепта состоит в том, чтобы перебрать все линейно независимые решения системы (16) (количество которых определяется формулами (80), (82), так как решений вида (84), вообще говоря, больше, чем нужно).

Общее решение уравнений (16) определено в следующей теореме.

Теорема 3. Уравнения (16) в пространстве размерности $m \le 4$ имеют n^m_{jS} линейно независимых решений, где n^m_{jS} задается формулой (82). Эти решения имеют вид

$$F_{(S)}^{a_1 a_2 \dots a_j} = g^{(a_{j-1} a_j} F_{(S)}^{a_1 a_2 \dots a_{j-2})} + \varepsilon_j\, \hat{f}^{a_1 a_2 \dots a_j} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{S} F^{(a_1 a_2 \dots a_{j+\alpha-1}} x^{a_{j+1}} x^{a_{j+2}} \dots x^{a_{j+\alpha-1})} \; , \quad \varepsilon_j\ \tfrac{1}{2}[1+(-1)^j] \; , \tag{86}$$

где $F^{a_1 a_2 \dots a_{j+\alpha-1}}$ – тензоры Киллинга ранга $j+\alpha-1$ первого порядка, явный вид которых задается теоремой 2, $F_{(S)}^{a_1 a_2 \dots a_{j-2}}$ – тензор Киллинга ранга $j-2$ и порядка S;

$$\hat{f}^{a_1 a_2 \dots a_j} = \sum_{\mu=0}^{\frac{j}{2}-1} (-1)^{\mu} C^{\mu}_{\frac{j}{2}-1}\, x^{(a_1} x^{a_2} \dots x^{a_{2\mu+1}} \times$$

$$\times\, g^{a_{2\mu+2} a_{2\mu+3}} \dots g^{a_{j-2} a_{j-1}} \lambda^{[a_j),c]} x_c \; , \tag{87}$$

$\lambda^{[a_j,c]}$ – произвольный антисимметричный тензор второго ранга.

Доказательство. В силу лемм 3, 4 функция $F_{(S)}^{a_1 a_2 \dots a_j}$, задаваемая формулой (86), является тензором Киллинга ранга j и порядка S: первое слагаемое-по определению, второе – согласно лемме 3 (как произведения тензора Киллинга первого порядка на $\varphi = \lambda^{\mu} x_{\mu}$), третье – согласно лемме 4 (каждая свертка с x_{μ} понижает ранг и повышает порядок тензора Киллинга, а первую свертку делаем с описанными выше тензорами первого порядка).

Несколько труднее убедиться, что формула (26) задает все линейно независимые тензоры Киллинга порядка S. Доказательство линейной независимости всех членов формулы (86) сводится к сравнению слагаемых, имеющих одинаковый порядок по x_{a_i} с использованием различных сверток по одной, двум,... и т.д. парам индексов. Подсчет количества независимых решений, задаваемых формулой (86), нетрудно осуществить, перебирая независимые решения для тензоров первого порядка $F^{a_1 a_2 \dots a_{j+\alpha-1}}$, входящих в последнее слагаемое (такие тензоры описаны в теореме 2, причем необходимо ограничиться решениями, соответствующими $C_2 > \alpha-1$, т.к. остальные дают нулевой вклад в свертки из (86)), и добавляя число решений вида

(87). В результате получаем согласие с формулой

$$N = n^m_{js} - n^m_{j-2\,s} \quad ,$$

где η^m_{js} – общее число решений, задаваемое формулами (82), также за- $n^m_{j-2\,s}$ – число решений вида $g^{(a_{j-1}a_j}F_s^{a_1a_2\ldots a_{j-2})}$, также за-
$n^m_{j-2\,s}$ – число решений вида, N – общее число решений под знаком суммы и
даваемое в (82), N – общее число решений вида (87). Соответствующие громоздкие выкладки мы опус-
решений вида (87). Соответствующие громоздкие выкладки мы опус-
каем.

Формула (86) определяет рекуррентные соотношения для вычис-
ления явного вида тензора Киллинга порядка s и ранга j по
известному тензору порядка s и ранга $j-2$. Такие вычис-
ления нетрудно проверить, исходя из известных тензоров Киллинга
первого порядка и произвольного ранга, см теорему 2.

Приведем в качестве примера явные выражения для векторов
Киллинга порядка $s \le 3$ в трехмерном пространстве, получаемые
из общих соотношений (86):

$$s=1 \qquad F^a_{(1)} = \lambda^a + \varepsilon^{abc}\eta_b x_c \quad ,$$

$$s=2 \qquad F^a_{(2)} = F^a_{(1)} + \lambda^{ab}x_b + \lambda x^a + \varepsilon^{abc}\eta_{bd}x_c x^d + \xi^a x^2 - x^a \xi^b x_b \quad ,$$

$$s=3 \qquad F^a_{(3)} = F^a_{(2)} + \lambda^{abc}x_b x_c + \tilde{\lambda}^b x_b x^a + \varepsilon^{abc}\eta_{bde}x_c x^d x^e + \xi^{ab}x_b x^2 - x^a \xi^{bc}x_b x_c + \varepsilon^{abc}x_b \xi_c x^2 \quad .$$

Здесь ε^{abc} – единичный антисимметричный тензор, остальные
греческие буквы обозначают произвольные симметричные и бесследо-
вые тензоры.

§ 9. Конформные тензоры Киллинга ранга j и порядка s

Обсудим коротко уравнения (17), описывающие конформные
тензоры Киллинга порядка s, и приведем без доказательств
решения этих уравнений для произвольных j, s и $m \le 4$.

Конструктивный путь для построения решений уравнений (17)
указывает следующее утверждение, которое может быть доказано
прямой проверкой.

<u>Лемма 5</u>. Пусть $F_s^{a_1a_2\ldots a_j}$ – конформный тензор Киллинга
ранга j и порядка s, а φ – произвольная функция,
удовлетворяющая уравнению

$$\partial^\mu \partial^\nu \varphi = g^{\mu\nu}\lambda \quad , \quad \lambda = \mathrm{const} \; . \tag{88}$$

Тогда функция

$$\tilde{F}_{s+1}^{a_1a_2\ldots a_j} = \varphi\, F_s^{a_1a_2\ldots a_j} \tag{89}$$

является конформным тензором Киллинга ранга j и порядка $s+1$.

Можно показать, что количества линейно независимых решений
уравнений (17) для произвольных j, s и $m=3,4$ задаются
формулами

$$m=3 \; , \quad \hat{N}^3_{js} = \frac{s}{6}(2j+1)(2j+2s+1)(2j+s+1) \quad ,$$
$$m=4 \; , \quad \hat{N}^4_{js} = \frac{s}{12}(j+1)^2(j+s+1)^2(2j+2+s) \quad . \tag{90}$$

Используя лемму 5, нам удалось построить N^m_{js} линейно
независимых тензоров Киллинга ранга j и порядка s (задаю-
щих полную систему решений уравнений (17)) в следующем виде:

$$F_{(s)}^{a_1a_2\ldots a_j} = \sum_{i=1}^{s}\Big(F_i^{a_1a_2\ldots a_j}(x^2)^{i-1} + \sum_{d=0}^{s-i} f_{i-1\,d}^{a_1a_2\ldots a_j}(x^2)^d \Big) \; . \tag{91}$$

Здесь $F_i^{a_1a_2\ldots a_j}$ – конформные тензоры ранга j первого по-
рядка, задаваемые формулами (60), (61) или (66) (индекс "i" раз-
личает независимые решения (91) с разными степенями x^2).

$f_{i-1\,\alpha}^{a_1 a_2 \dots a_j}$ – тензоры ранга j, явный вид которых приведен ниже.

В случае $m=2$ уже конформных тензоров Киллинга первого порядка оказывается бесконечно много, (см.69)). Те же формулы (69) задают общий вид конформного тензора Киллинга произвольного порядка S.

В случае $m=3$ функции $f_{i-1\,\alpha}^{a_1 a_2 \dots a_j}$ характеризуются дополнительным целым числом c,

$$0 \le c \le 2j\ , \tag{92}$$

и определяется с точностью до произвольного симметричного бесследового тензора $\tilde{\lambda}^{a_1 a_2 \dots a_R}$ ранга $R = 2(c+i)-1$.

Явный вид этих функций задается формулой (93):

$$f_{i\alpha}^{a_1 a_2 \dots a_j} = \Big[\varepsilon_c \hat{f}_{i\alpha c}^{a_1 a_2 \dots a_j} + (1-\varepsilon_c)\hat{f}^{b(a_1 a_2 \dots a_{j-1}}\varepsilon^{a_j)bc} x_c \Big]^{SL}, \tag{93}$$

где

$$\hat{f}_{i\alpha c}^{a_1 a_2 \dots a_j} = \sum_{n=0}^{\{\frac{c}{2}\}} (-2)^n C^n_{\{\frac{c}{2}\}} \tilde{\lambda}^{b_1 b_2 \dots b_{\alpha+n}(a_1 a_2 \dots a_{j-n}} \times$$

$$\times x^{a_{j-n+1}} x^{a_{j-n+2}} \dots x^{a_j)} x_{b_1} x_{b_2} \dots x_{b_{\alpha+n}} x^{2(\{\frac{c}{2}\}-n)}\ , \tag{94}$$

$\varepsilon_c = \frac{1}{2}[1+(-1)^c]$

символ $[\cdot]^{SL}$ обозначает бесследовую часть соответствующего тензора, см. (18), (19) для $m=3$, а индекс α введен для нумерации линейно независимых решений (91) с разными степенями x^2.

В случае $m=4$ функции $f_{i\alpha}^{a_1 a_2 \dots a_j}$ характеризуются парой дополнительных целых чисел $c=(c_1, c_2)$

$$-j \le c_1 \le j\ , \quad 0 \le c_2 \le \Big\{ \frac{j-|c_1|}{2} \Big\} \tag{95}$$

и определяется с точностью до произвольного неприводимого тензора $\tilde{\lambda}^{a_1 \dots a_{R_1}[\lambda_{R_1+1} b_1] \dots [a_{R_1+R_2} b_{R_2}]}$ ранга $R_1 + 2R_2$, где

$$R_1 = |c_1| + 2c_2 + i\ , \quad R_2 = j - |c_1| - 2c_2\ . \tag{96}$$

Явный вид этих функций задается формулой (97):

$$f_{i\alpha}^{a_1 a_2 \dots a_j} = \Big[\sum_{\alpha=0}^{n+c_2} (-1)^\alpha C^\alpha_{n+c_2} (x^2)^\alpha \times$$

$$\times \lambda^{b_1 b_2 \dots b_{n+c_2-\alpha-i}(a_1 a_2 \dots a_{|c_1|-n+\alpha+i+c_2}[a_{|c_1|-n+\alpha+i+c_2+1} d_1] \dots} \tag{97}$$

$$\dots{}^{[a_{j-n+i+\alpha-c_2} d_{j-|c_1|-2c_2}]} x^{a_{j-n+i+\alpha-c_2+1}} \dots x^{a_j} x_{b_1} \dots x_{b_{n+c_2-\alpha-i}} x_{d_1} \dots x_{d_{j-|c_1|-2c_2}} \Big]^{SL},$$

где

$$n = \begin{cases} -c_1\ , & c_1 < 0 \\ 0\ , & c_1 \ge 0 \end{cases} \tag{98}$$

и по индексам $a_1 a_2 \dots a_j$ в правой части подразумевается симметризация.

Формулы (91)-(98) задаются в явном виде все линейно независимые конформные тензоры Киллинга ранга j и порядка S в пространствах размерности $m = p+q \le 4$. В частности, конформные векторы порядка $S \le 3$ в трехмерном пространстве, согласно (91), (94), имеют следующий вид:

$$S=1\ , \quad F^a_{(1)} = \lambda^a_{(1)} + \varepsilon^{abc}\eta^b_{(1)} x_c + \xi^a_{(1)} x^2 - 2x^a \xi^b_{(1)} x_b + $$
$$+ \mu x^a;$$

$$S=2\ , \quad F^a_{(2)} = F^a_{(1)} + \tilde{F}^a_{(1)} x^2 + \lambda^{ab}_{(2)} x_b + \varepsilon^{abc}\eta^{bd}_{(2)} x_c x_d +$$
$$+ \xi^{ab}_{(2)} x^2 x_b - 2x^a \xi^{bc}_{(2)} x_b x_c\ ;$$

$$S=3, \quad F^{a}_{(3)} = F^{a}_{(2)} + x^4 \tilde{\tilde{F}}^{a}_{(1)} + x^2 \big(\lambda^{ab}_{(3)} x_b + \varepsilon^{abc} \eta^{bd}_{(3)} x_c x_d + \xi^{ab}_{(3)} x_b x^2 - 2 x^a \xi^{bc}_{(3)} x_b x_c \big) + \lambda'^{abc}_{(3)} x_b x_c + \varepsilon^{abc} \eta^{bdk}_{(3)} x_c x_d x_k + \xi^{abc}_{(3)} x_b x_c x^2 - 2 x^a \xi^{bcd}_{(3)} x_b x_c x_d .$$

Здесь ε^{abc} – единичный антисимметричный тензор, остальные греческие буквы обозначают произвольные симметричные бесследовые тензоры $F^{a}_{(1)}$, $\tilde{F}^{a}_{(1)}$ и $\tilde{\tilde{F}}^{a}_{(1)}$ – векторы Киллинга первого порядка (вообще говоря, различные).

Заключение. Подведем итоги. Мы определили понятия тензора Киллинга ранга j и порядка s и конформного тензора Киллинга ранга j и порядка s. Эти тензоры определяются как общие решения уравнений (16) или (17), которые в случае $s=1$ совпадают с общепринятыми уравнениями для тензора Киллинга и конформного тензора Киллинга, см., например, [11].

Мы ограничились исследованием уравнений (16) и (17) в плоском пространстве де Ситтера, обобщение этих уравнений на случай пространств с ненулевой кривизной предполагает замену ∂^{a_i} на ковариантные производные.

Уравнения (16) и (17) являются естественными обобщениями уравнений Киллинга [2,10] и возникают при описании операторов симметрии высших порядков. В настоящей работе показана связь этих уравнений (для тензоров первого порядка) с операторами симметрии высших порядков уравнения Клейна–Гордона–Фока, см. §§ 2,5. Уравнения для тензоров Киллинга и конформных тензоров Киллинга порядка $s>1$ возникают в задачах описания операторов симметрии порядка s для систем уравнений в частных производных – в частности, уравнений Максвелла [13]. Мы нашли в явном виде все неэквивалентные тензоры Киллинга ранга j и порядка s в пространстве размерности $p+q$ для произвольных j и s и $p+q\leq 4$. Ограничение по размерности пространства вызвано, с одной стороны, соображениями практической целесообразности (абсолютное большинство уравнений математической физики, являющейся областью научных интересов авторов, имеет размерность $m\leq 4$ по числу независимых переменных), а с другой – не преодоленными пока трудностями доказательства невырожденности систем алгебраических уравнений для коэффициентов тензора Киллинга в пространстве произвольной размерности, см. приложение. При этом формулы (42), (66), (86), (97), задающие решения уравнений (16), (17) для $p+q=4$, по-видимому, задают общее решение этих уравнений для произвольных $p+q\geq 4$.

Найденные общие решения для тензоров Киллинга и конформных тензоров Киллинга произвольного ранга и порядка могут найти достаточно широкое применение при описании операторов симметрии систем дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе с использованием этих решений найден полный набор операторов симметрии произвольного конечного порядка уравнений Клейна–Гордона–Фока с нулевой и ненулевой массой.

Дополнение

Невырожденность системы уравнений для коэффициентов тензора Киллинга

Приведем доказательство теоремы 1, устанавливающей невырожденность системы линейных алгебраических уравнений (22). Ввиду громоздкости это доказательство приводится в сокращенном виде.

Основная трудность анализа системы (72) состоит в том, что его необходимо провести для произвольного значения j, т.е. для системы произвольной наперед заданной размерности, описываемой формулой (20).

Рассмотрим уравнения (22) для $m=4$, при этом уравнения для $m<4$ будут включаться в анализ как частные случаи. Индексы $a_1, a_2, \ldots a_{j+1}$ и $b_1, b_2, \ldots b_k$ при $k<j$ независимо пробегают значения от 1 до 4. При этом, как нетрудно заметить, система (22) распадается на незацепляющиеся подсистемы $M(S_1, S_2, S_3, S_4)$, где S_ℓ $(\ell=1,2,3,4)$ задает число индексов, имеющих значение ℓ. Очевидно,

$$S_1+S_2+S_3+S_4=j+1+K, \qquad (\text{Д1})$$

так что $0\le S_\ell\le j+K+1$.

Система (22) невырождена в том и только том случае, если невырождены все ее подсистемы $M(S_1,S_2,S_3,S_4)$. Для произвольной подсистемы $M(S_1,S_2,S_3,S_4)$, не умаляя общности, можно положить

$$S_1\le S_2\le S_3\le S_4. \qquad (\text{Д2})$$

остальные случаи сводятся к (Д2) перенумерацией переменных.

Докажем невырожденность произвольной подсистемы $M(S_1,S_2,S_3,S_4)$.

Обозначим символом n_ℓ $(\ell=1,2,3,4)$ количество индексов неизвестной $F^{a_1a_2\dots a_j,a_{j+1}b_1b_2\dots b_K}$, стоящих слева от запятой и равных ℓ, а символом m_ℓ – количество равных ℓ индексов после запятой. Очевидно, должно выполняться

$$m_\ell+n_\ell=S_\ell, \quad n_1+n_2+n_3+n_4=j, \quad m_1+m_2+m_3+m_4=K+1, \qquad (\text{Д3})$$

так что из восьми чисел n_ℓ и m_ℓ линейно независимы только три (см. (Д1)). Выберем в качестве независимых n_1, n_2 и n_3, тогда тройка (n_1,n_2,n_3) полностью задает вектор $F^{a_1\dots a_j a_{j+1}b_1\dots b_K}$ из подсистемы $M(S_1,S_2,S_3,S_4)$. Используя для такого вектора обозначение $F(n_1,n_2,n_3)$ и принимая во внимание соотношения (Д1)–(Д3), любое уравнение (22) из подсистемы $M(S_1,S_2,S_3,S_4)$ можно записать в одной из следующих форм:

$$\begin{gathered}(n_3+1)F(0,0,n_3)+(j-n_3)F(0,0,n_3+1)=0, \\ \max\{S_3-K-1,-1\}\le n_3\le S_3-1;\end{gathered} \qquad (\text{Д4})$$

$$\begin{gathered}(n_2+1)F(0,n_2,n_3)+n_3F(0,n_2+1,n_3-1)+(j-n_2-n_3)F(0,n_2+1,n_3)=0, \\ \max\{0,S_1+S_2-K-1\}\le n_2\le S_2-1, \\ \max\{0,S_1+S_2+S_3-K-1-n_2\}\le n_3\le \min\{S_3,j-n_2\};\end{gathered} \qquad (\text{Д5})$$

$$\begin{gathered}(n_1+1)F(n_1,n_2,n_3)+n_2F(n_1+1,n_2-1,n_3)+n_3F(n_1+1,n_2,n_3-1)+ \\ +(j-n_1-n_2-n_3)F(n_1+1,n_2,n_3)=0, \\ \max\{0,S_1-K-1\}\le n_1\le S_1-1, \\ \max\{0,S_1+S_2-K-1-n_1\}\le n_2\le S_2, \\ \max\{0,S_1+S_2+S_3-K-1-n_1-n_2\}\le n_3\le\min\{S_3,j-n_1-n_2\}.\end{gathered} \qquad (\text{Д6})$$

При $S_1>0$ (случай $S_1=0$ рассмотрен ниже) имеется три возможности:

$$\begin{aligned}&1. \quad S_1+S_2<K+1 \\ &2. \quad S_1+S_2\geqslant K+1, \quad S_1<K+1 \\ &3. \quad S_1\geqslant K+1\end{aligned} \qquad (\text{Д7})$$

Рассмотрим эти возможности последовательно.

В случае 1 исследуемая система уравнений задается формулами (Д4)–(Д6).

Представим вектор $F(n_1,n_2,n_3)$ в виде столбца, компоненты которого нумерует индекс

$$F(n_1,n_2,n_3)=\left(F(n_1,n_2,\tilde n_3),F(n_1,n_2,\tilde n_3+1)\dots F(n_1,n_2,\hat n_3)\right)^T, \qquad (\text{Д8})$$

где $\tilde n_3$ и $\hat n_3$ – минимальное и максимальное значения n_3, а каждый вектор $F(n_1,n_2,\tilde n_3+K)$, в свою очередь, будем считать столбцом, компоненты которого нумерует индекс n_2, $0\le n_2\le S_2$. Тогда уравнения (Д4)–(Д6) можно записать в матричной форме

$$AF=0, \qquad (\text{Д9})$$

где

$$A=\begin{pmatrix} B_0 & & & & \\ E_1 & B_1 & & & \\ & 2E_2 & B_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_1 E & B_{S_1} \end{pmatrix} \qquad B_\ell=\begin{pmatrix} D_\ell & & & & \\ E_{\ell 1} & D_{\ell+1} & & & \\ & 2E_{\ell 2} & D_{\ell+2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_2 E_{\ell S_2} & D_{\ell+S_2} \end{pmatrix} \qquad (\text{Д10})$$

Здесь E_k и $E_{\ell f}$ $(\ell, k = 1,2,\dots S_1,\ f=1,2,\dots S_2)$ – единичные матрицы, число строк которых совпадает с числом строк соседних матриц справа (число столбцов B_k (D_ℓ) совпадает с числом строк B_{k+1} $(D_{\ell+1})$), D_ℓ – матрицы, явный вид которых определен ниже. А именно, при $S_1+S_2+S_3 < k+1$:

$$D_\ell=\begin{pmatrix} j-\ell+1 & & & & \\ 1 & j-\ell & & & \\ & 2 & j-\ell-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_3 & j-\ell+1-S_3 \end{pmatrix}, \qquad (\text{Д11})$$

при $S_1+S_2+S_3 \geq k+1$:

$$D_\ell=\begin{pmatrix} a_1 & j-a_1-\ell+1 & & & \\ & a_1+1 & j-a_1-\ell & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_2 & j-a_2-\ell+1 \end{pmatrix}, \qquad (\text{Д12})$$

где $a_1=\max\{0, S_1+S_2+S_3-k-\ell\}$, $a_2=\min\{S_3, j-\ell+1\}$.

При этом в случаях $a_1=0$ или (и) $S_3 \geq j-\ell+1$ в матрице (Д12) следует зачеркнуть первый или (и) последний столбец.

<u>Замечание</u>. Можно показать, что матриц D_ℓ вида (Д11) (или (Д12) $a_1 \neq 0$ $j-a_1-\ell+1 \neq 0$) всегда будет не меньше, чем матриц (Д12) с $a_1=j-a_2-\ell+1=0$.

Наша задача – доказать, что все строки матрицы A (Д10) линейно независимы.

Записывая эту матрицу в эквивалентной форме

$$A'=\begin{pmatrix} E_1 & B_1 & & & \\ & 2E_2 & B_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_1 E_{S_1} & B_{S_1} \\ B_0 & & & & \end{pmatrix}$$

и подвергая A' преобразованию $A' \to A'' = V A' W$, не изменяющему ранг, где V и W – обратимые матрицы вида

$$V=\begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E_{S_1} & \\ -B_0 & B_0 B_1 & \cdots & (-1)^{S_1+1}\frac{1}{S_1!}B_0 B_1 B_2 \cdots B_{S_1} & E_0 \end{pmatrix},$$

$$W=\begin{pmatrix} E_1 & -B_1 & \frac{1}{2!}B_1 B_2 & -\frac{1}{3!}B_1 B_2 B_3 & \cdots & (-1)^{S_1}\frac{1}{(S_1-1)!}B_1 B_2 \cdots B_{S_1-1} \\ & E_2 & -B_2 & \frac{1}{2!}B_2 B_3 & \cdots & (-1)^{S_1-1}\frac{1}{(S_1-2)!}B_2 B_3 \cdots B_{S_1-1} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & E_{S_1-1} & -B_{S_1-1} \\ & & & & & E_{S_1} \end{pmatrix},$$

получаем

$$A'' = \begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E_{s_1} & \\ & & & & \frac{1}{s_1!} B_0 B_1 B_2 \cdots B_{s_1} \end{pmatrix}, \qquad (Д13)$$

и доказательство линейной независимости строк матрицы (Д10) сводится к доказательству линейной независимости строк матрицы

$$\hat{B}^{s_1} = B_0 B_1 \cdots B_{s_1}. \qquad (Д14)$$

<u>Лемма Д1</u>. Матрица (Д14) может быть разбита на блоки $\hat{B}^{s_1}_{\ell f}$, включающие столько же строк, как и матрица $D_{\ell-1}$, и столько же столбцов, как матрица $D_{s_1+\ell-1}$, $1 \le \ell \le s_2+1$, $1 \le f \le s_2+1$.

Эти блоки имеют вид

$$B^{s_1}_{\ell f} = \begin{cases} \hat{0}, & -s_2 \le \ell - f < 0 \quad \text{или} \quad s_1+2 \le \ell - f \le s_2, \\ C^{\ell-f}_{s_1+1} A^{\ell-f}_{\ell-1} D_{\ell-1} D_{\ell} \cdots D_{s_1+f-1}, & 0 \le \ell - f \le s_1, \\ C^{s_1+1}_{s_1+1} A^{s_1+1}_{\ell-1} E, & \ell - f = s_1+1. \end{cases} \qquad (Д15)$$

Здесь $D_{\ell-1}, D_{\ell}, \dots$ – матрицы из (Д10), общий вид которых задается формулами (Д11), (Д12), $\hat{0}$ и E – нулевая и единичная матрицы соответствующей размерности, $C^{k}_{m} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, $A^{m}_{k} = \frac{k!}{(k-m)!}$.

<u>Доказательство</u> может быть проведено по индукции, последовательным исследованием произведений $B_0 B_1$, $B_0 B_1 B_2, \dots$

<u>Лемма Д2</u>. Матрица (Д14) с помощью конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к виду

$$\hat{B}^{s_1} = \begin{pmatrix} & & & & & & & D_0 D_1 \cdots D_{s_1+s_2} \\ & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & & & D_{s_1-1} D_{s_1} \cdots D_{s_2+1} & & \\ & & & & D_{s_1} D_{s_1+1} \cdots D_{s_2} & & & \\ & & & E_{s_2-s_1} & & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & \\ & E_2 & & & & & & \\ E_1 & & & & & & & \end{pmatrix}. \qquad (Д16)$$

<u>Доказательство</u>. Упомянутые в лемме элементарные преобразования могут быть описаны следующим образом.

1. Перейдем от матрицы (Д14) к матрице Π_d (d последовательно принимает значения $1, 2, \dots s_2 - s_1$), используя следующий алгоритм:

1) Представим матрицу (Д14) в блочной форме (Д15) и будем оперировать со "строками" с номером ℓ, включающими блоки $\hat{B}^{s_1}_{\ell 1}, \hat{B}^{s_1}_{\ell 2}, \dots \hat{B}^{s_1}_{\ell\, s_2+1}$.

2) Умножим $(t+1)$-ю "строку" матрицы $\hat{B}^{s_1}$ на матрицу D_{t-1}, а "строку" матрицы $\hat{B}^{s_1}$ с номером t – на число $s_1 - t + 2$ и вычтем второе из первого. Полученный результат запишем на место "строки" с номером t. Проделаем эту операцию последовательно со всеми "строками" для $t = 1, 2, \dots s_1$.

3). Умножим (s_1+2)-ю "строку" матрицы $\hat{B}^{s_1}$ на $D_{s_1} \cdots D_{s_2} \times$ $\times \dots D_{s_1+d-1}$ и вычтем из полученного результата "строку" с номером s_1+1, умноженную на d. Результат запишем на место s_1+1 "строки", остальные "строки" оставляем без изменений.

4) В результате описанных преобразований $\hat{B}^{s_1} \to \Pi'_d$, где Π'_d – матрица, имеющая в первом "столбце" единственный элемент $(\Pi'_d)_{s_1+2\ 1}$, отличный от нуля. С помощью элементарных преобразований можно добиться, чтобы все элементы s_1+2 "строки" (кроме $(\Pi'_d)_{s_1+2\ 1}$) также были нулевыми.

5) Опустим (s_1+2)-ю "строку" в самую нижнюю позицию.

В результате приходим к матрице $\Pi_{s_2-s_1}$ следующего вида:

$$\Pi_{s_2-s_1} = \begin{pmatrix} & & & M \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & E_{s_2-s_1} \\ & E_2 & & \\ E_1 & & & \end{pmatrix}, \qquad (Д17)$$

где M – матрица, которая может быть разбита на блоки следующего вида:

$$M_{\ell f} = \begin{cases} 0, & -s_1 \le \ell - f < 0 \\ C^{\ell-f}_{s_2+1} A^{\ell-f}_{\ell-1} D_{\ell-1} D_\ell \dots D_{f+s_2+1}, & 0 \le \ell - f \le s_1 \end{cases},$$

$(f,\ell) = 1,2,\dots s_1+1.$

2. Упростим матрицу M, используя последовательно приведенный ниже алгоритм для $q=0,1,\dots s_1-1$, а при каждом значении q – для $k=1,2,\dots s_1-q$.

1) Умножим $(k+1)$-ю "строку" матрицы M на матрицу D_{k-1}, а k-ю "строку" – на число s_1-k+2 и вычтем второе из первого, полученный результат поместим на место "строки" с номером k, остальные "строки" оставим без изменений.

2) Проделаем эту операцию последовательно для всех $k=1,2,\dots s_1-q$, упрощая получающиеся при каждом шаге матрицы с помощью элементарных преобразований, зануляющих все элементы "строк", кроме одного, который был единственным отличным от нуля в своем столбце.

3) Проделаем операции 1), 2) последовательно для всех $q=0,1,\dots s_1-1$.

В результате приходим к матрице (Д16). ■

<u>Лемма Д3</u>. Пусть матрица $D=\|d_{ab}\|$, $a=1,2,\dots s$, $b=1,2,\dots r$, $s<r$ имеет ранг s, причем все миноры D положительны, а матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ b_{21} & b_{22} & & & \\ & b_{32} & b_{33} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{r-1\,r-2} & b_{r-1\,r-1} \\ & & & & b_{r\,r-1} \end{pmatrix}, \qquad (Д18)$$

где $b_{kk}>0$ и $b_{k+1\,k}>0$, $k=1,2,\dots r-1$. Тогда матрица $C=DB$ также имеет ранг s, и все миноры C положительны.

<u>Доказательство</u> сводится к непосредственному использованию формулы Бине-Коши [15], выражающей спиноры произведения матриц DB через сумму произведений миноров матрицы D на миноры матрицы B. В результате каждый минор матрицы C представляется в виде суммы положительных величин. ■

В силу леммы Д2 доказательство линейной независимости матрицы A (Д10) сводится к доказательству линейной независимости строк матриц $\mathcal{D}^d$,

$$\mathcal{D}^d \equiv D_{s_1-d} D_{s_1-d+1} \cdots D_{s_2+d}, \quad d=0,1,2,\dots s_1, \qquad (Д19)$$

где $D_{s_1-d}, D_{s_1-d+1},\dots$ – матрицы вида (Д1) или (Д2). В силу замечания на стр. 51 число строк любой матрицы (Д19) не превышает числа ее столбцов. Рассматривая последовательно произведения $D_{s_1-d}D_{s_1-d+1}$, $D_{s_1-d}D_{s_1-d+1}D_{s_1-d+2}$ ..... и пользуясь каждый раз либо неравенством Сильвестра [16], либо леммой Д3, нетрудно показать, что ранг матрицы (Д19) совпадает с числом ее строк, и, следовательно, все строки матрицы A (Д10) линейно независимы.

Мы доказали невырожденность системы (Д4)-(Д6) для случая 1 из (Д7). В случае 2, когда $s_1+s_2 \ge k+1$, $s_1<k+1$, система (Д4)-(Д6) сводится к уравнениям (Д5), (Д6), которые также

можно записать в матричной форме (Д9), где A задается в (Д10), но блоки B_ℓ принимают новую форму. А именно, при $S_2 < K+1$

$$B_\ell = \begin{pmatrix} (S_1+S_2-K-\ell)E_0 & D_0 & & & \\ & (S_1+S_2-K-\ell+1)E_1 & D_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_2 E_{K-S_1+\ell} & D_{K-S_1+\ell} \end{pmatrix} \qquad (Д20)$$

$\ell = 0, 1, \dots S_1+S_2-K-1$ и

$$B_\ell = \begin{pmatrix} D_{\ell+K-S_1-S_2} & & & \\ E_1 & D_{\ell+K-S_1-S_2+1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & S_2 E_{S_2} & D_{\ell+K-S_1} \end{pmatrix}, \qquad (Д21)$$

если $S_1+S_2-K \le \ell \le S_1$. Если же $S_2 \ge K$, то все матрицы B_ℓ, $0 \le \ell \le S_1$, задаются формулой (Д20).

Явный вид матриц D_ℓ задается соотношениями (Д22)-(Д23): для $S_2 < K$

$$D_\ell = \begin{pmatrix} a_1 & j-\ell-a_1 & & & \\ & a_1+1 & j-\ell-a_1-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_2 & j-\ell-a_2 \end{pmatrix}. \qquad (Д22)$$

где $a_1 = \max\{0, S_1+S_2+S_3-K-\ell-1\}$, $a_2 = \min\{S_3, j-\ell\}$, $\ell = 0, 1, \dots K-S_1$,

$$D_\ell = \begin{pmatrix} a_1 & j-\ell+K+1-S_1-S_2-a_1 & & \\ & a_1+1 & j-\ell+K-S_1-S_2-a_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & a_2 & j-\ell+K-S_1-S_2-a_2 \end{pmatrix}, \qquad (Д23)$$

где $a_1 = \max\{0, S_3-\ell\}$, $a_2 = \min\{S_3, j-\ell+K+1-S_1-S_2\}$, $\ell = K-S_1+1, K-S_1+2, \dots K$.

Если $a_1 = 0$, то первые столбцы в (Д22) и (Д23) следует вычеркнуть, если $S_3 \ge j-\ell$, то следует вычеркнуть последний столбец в (Д22), а при $S_3 \ge j-\ell+K+1-S_1-S_2$ – последний столбец в (Д23).

В случае $S_2 \ge K$ матрицы D_ℓ задаются формулой (Д22) для всех ℓ.

Наша задача – доказать линейную независимость строк матрицы A, определяемой соотношениями (Д10), (Д20)-(Д23). Преобразуя эту матрицу к форме (Д13), мы снова сводим эту задачу к исследованию матрицы (Д14), которая в нашем случае может быть разбита на блоки вида

$$\hat{B}^{S_1}_{\ell f} = \begin{cases} \hat{0}, & -S_2 \le \ell-f < S_1+S_2-K \quad \text{или} \quad K-S_2+2 \le \ell-f \le S_2 \\ C^{\ell+S_1+S_2-K-f}_{S_1+1} A^{\ell+S_1+S_2-K-f}_{\ell+S_1+S_2-K-1} D_{\ell-1} D_\ell \dots D_{K-S_2-1-f}, & -S_1-S_2+K \le \ell-f \le K-S_2 \\ C^{S_1+1}_{S_1+1} A^{S_1+1}_{\ell+S_1+S_2-K-1} E, & \ell-f = K+1-S_2, \end{cases} \qquad (Д24)$$

где

$$1 \le \ell \le K+1-S_2, \quad 1 \le f \le S_2+1.$$

Дальнейшее доказательство проводится в полной аналогии с доказательством для случая I.

Рассмотрим теперь третий случай из (Д7). Соответствующая система уравнений (Д4)-(Д6) сводится к уравнениям (Д6). Записывая эти уравнения в матричной форме (Д9), приходим к соответствующей матрице A следующего вида :

$$A = \begin{pmatrix} (S_1-k)E_0 & B_0 & & & \\ & (S_1-k+1)E_1 & B_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_1 E_k & B_k \end{pmatrix}, \qquad (Д25)$$

где

$$B_R = \begin{pmatrix} (S_2-R)\tilde{E}_0 & D_0 & & & \\ & (S_2-R+1)\tilde{E}_1 & D_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_2 \tilde{E}_R & D_R \end{pmatrix}, \quad R=0,1,\dots k,$$

$$D_\ell = \begin{pmatrix} S_3-\ell & j+k+1-S_1-S_2-S_3 & & & \\ & S_3-\ell+1 & j+k-S_1-S_2-S_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_3 & j+k+1-S_1-S_2-S_3-\ell \end{pmatrix},$$

$\ell=0,1,\dots k.$

Все строки матрицы A (Д25), очевидно, являются линейно независимыми.

Таким образом, мы доказали, что система уравнений (Д4)-(Д6) является невырожденной во всех случаях, перечисленных в формулах (Д7). Следовательно, система (22) в случае $m=4$ невырождена.

Рассматривая только такие системы уравнений (Д4)-(Д6), которые соответствуют $S_1=0$, получаем полный набор незацепляющихся подсистем системы (22) для $m=3$, а в случае $S_1=S_2=0$ приходим к полному набору незацепляющихся подсистем системы (22) для $m=2$. Следовательно, невырожденность системы уравнений (22 для $m=2$ и $m=3$ вытекает из приведенного доказательства как частный случай.

Аналогично (но с привлечением несколько более громоздких выкладок) может быть доказана невырожденность систем линейных алгебраических уравнений (74) для коэффициентов тензоров Киллинга ранга j и порядка s .

Список литературы

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М: Наука, 1978. - 400 с.
2. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М: Наука, 1983. - 280 с.
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.- - М: Мир, 1989. - 639 с.
4. Фущич В.И. О дополнительной инвариантности уравнения Клейна-Гордона-Фока // Докл. АН СССР. - 1976. - 230, № 3. - С.570-573.
5. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. - 1979. - 246, № 4. - С.846-850.
6. Шаповалов В.Н., Экле Г.Г. Алгебраические свойства уравнения Дирака. - Элиста: Калмыц.гос. ун-т, 1972. - 90 с.
7. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М: Мир, 1981. - 342 с.
8. Kalnins E.L.,Miller W.Jr.,Williams G.C. Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables // J.Math.Phys.- 1986.- 27, N7.- P.1893-1900.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наук.думка, 1983. - 196 с.
10. Killing W. Über die Grundlagen der Geometrie // J.für den reine und anguv. Math.- 1892.- 109.- P. 121-186.
11. Walker M., Penrose R. On Quadratic First Integrals of the Geodesic Equation for Type {22} Spacetimes // Commun. Math. Phys.- 1970.- 18, N4 .-P.265-274.

12. Katrin G.H. and Levine T. Quadratic first integrals of the geodesics in spaces of constant curvature // Tensor. -1965.- 16, N1.- P.97.

13. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. - М: Наука, 1990.- 400 с.

14. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.- М.: Моск. гос. ун-т, 1962.- 234 с.

15. Ланкастер П. Теория матриц. - М: Наука, 1978. - 280 с.

16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М: Наука, 1984. - 832 с.

SUMMARY

GENERALIZED KILLING TENSORS AND THE SYMMETRY OF THE KLEIN-GORDON-FOCK EQUATION / Nikitin A.G., Prilipko A.I. - Kiev, 1990.- 59 p.- (Prepr./ Acad. Sci. Ukr.SSR. Inst. Mathematics; 90.23).

The non-Lie symmetry of the Klein-Gordon-Fock (KGF) equation in $(p+q)$ -dimensional Minkovsky space is studied. The complete sot of n -order symmetry operators of the KGF equation are calculated for any n and $p+q\leq 4$.

The definition of generalized Killing tensors of rank j and of order s (and of generalized conformal Killing tensors) is given as a complete sot of linearly independent solutions of some overdetermined systems of partial differential equations. The exact form of these tensors is found for arbitrary values j, s and $p+q\leq 4$.

The results obtained can be used for studies of higher symmetries of a wide class of systems of partial differential equations.

Ref.: 16.

Содержание