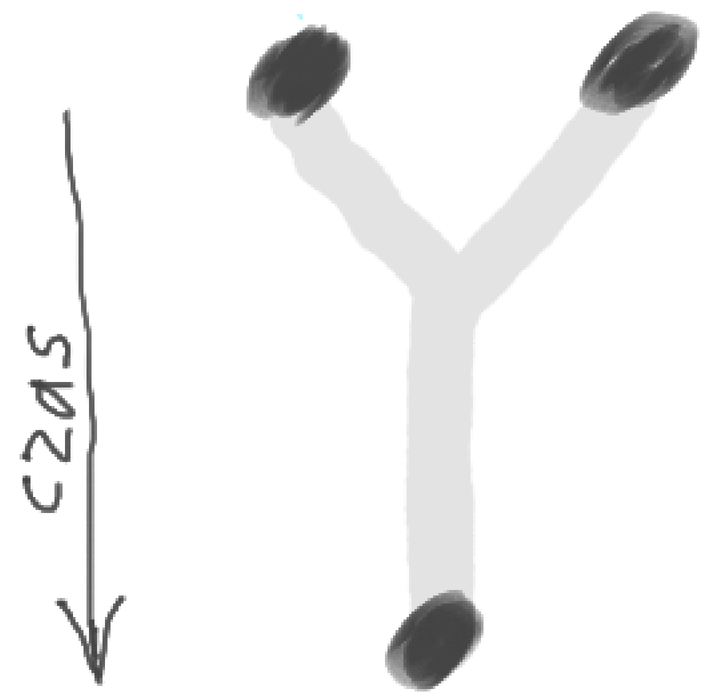
Rozmaitości w lustrze i arytmetyka

Masza Vlasenko (IM PAN)

66. Szkoła Matematyki Poglądowej, Siedlce
28 sierpnia 2023

Teoria strun

punktowe cząstki ------> 1-wymiarowe struny



linia świata cząstki

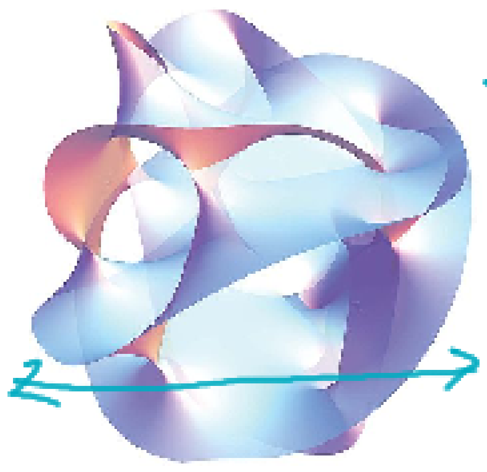
powierzchnia świata struny

czasoprestrzeń

4 makroskopowe wymiary otwarte
(długość, szerokość, wysokość i czas)

oraz conajmniej

6 dodatkowych wymiarów kompaktowych
„zwiniętych" jako rozmaitość Calabiego-Yau



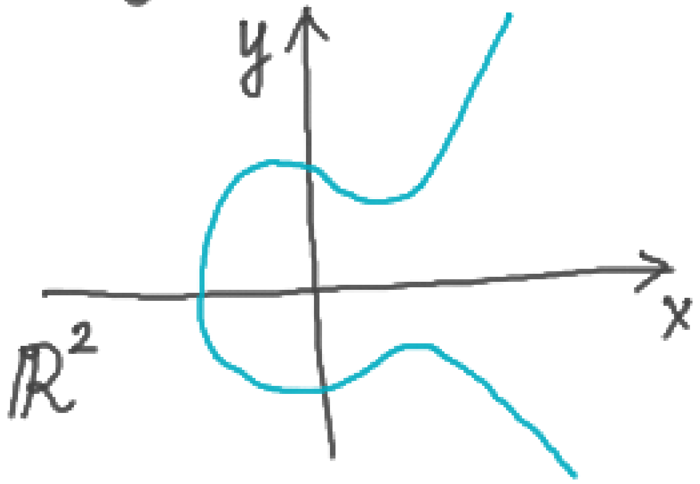
$\ell_p \approx 1.6 \times 10^{-35}$ m

Rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru n

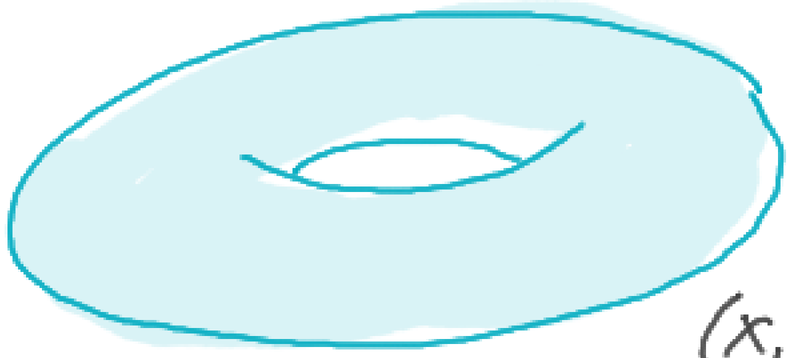
Co to jest?

$n=1$ krzywe eliptyczne

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$



$(x,y) \in \mathbb{R}^2$



$(x,y) \in \mathbb{C}^2$

$n=2$ powierzchnie K3 ...

Rozmaitość CY to gładka zespolona rzutowa rozmaitość wymiaru n na której istnieje holomorficzna n-forma różniczkowa bez zer

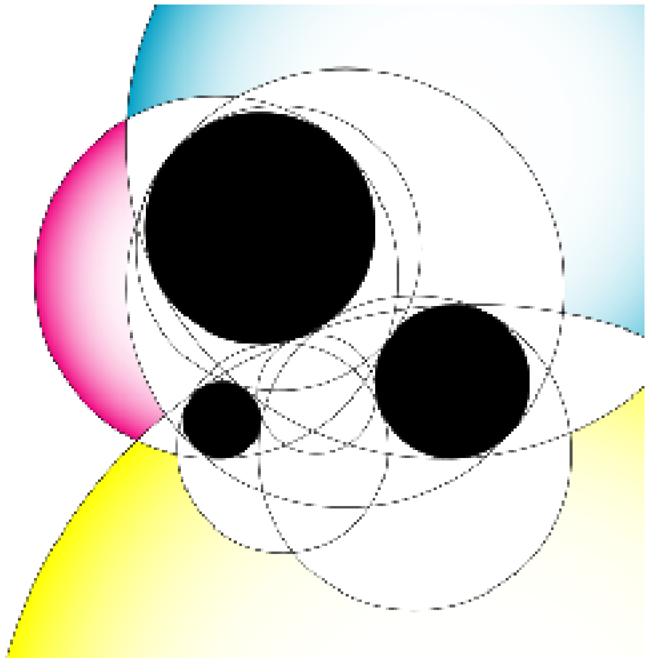
$\omega = \frac{dx}{y}$

Symetria lustrzana

n=3

Dwie rozmaitości CY mogą bardzo rożnić się jako kształty geometryczne, ale mimo to być równoważne gdy stosowane jako wymiary dodatkowe w teorii strun.

Geometria wyliczeniowa



kręgi Apoloniusza (III wiek p.n.e.)

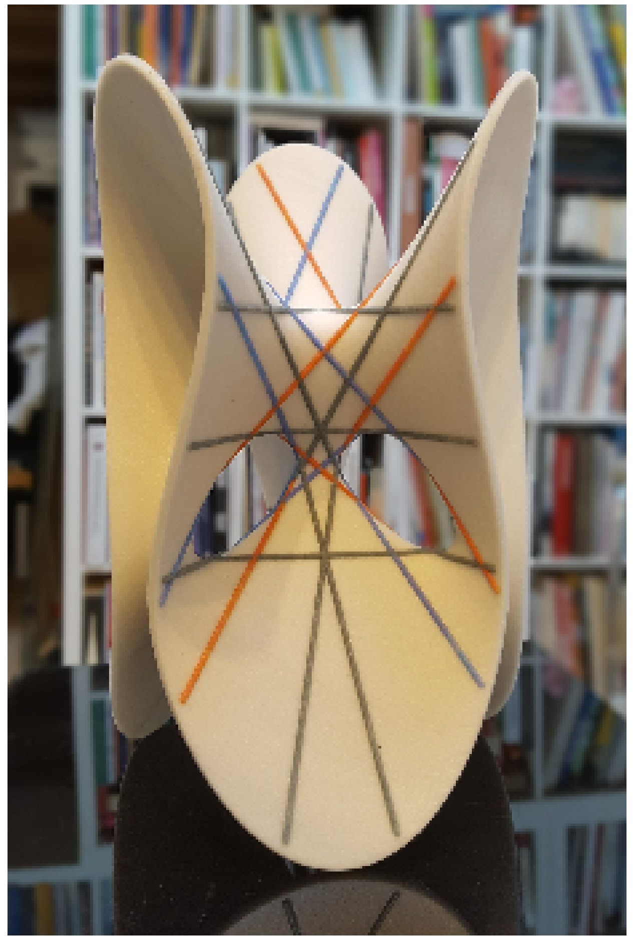
Ile istnieje okręgów stycznych do trzech danych okręgów?

8

Ile prostych znajduje się na gładkiej powierzchni stopnia 3 w $\mathbb{P}^3$?

27

George Salmon
Arthur Cayley
1840s



$$\sum_{i+j+k+l=3} a_{ijkl}\, x^i y^j z^k w^l = 0$$

$\binom{6}{3} = 20$ składników

Geometria wyliczeniowa II

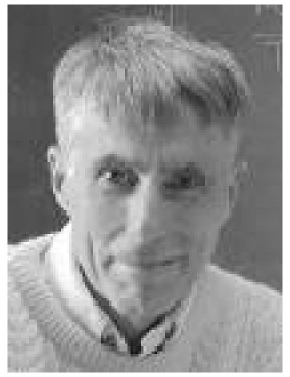
$X \subset \mathbb{P}^4$ hiperpowierzchnia (dim = 3) stopnia 5

$$\sum_{i+j+k+l+m=5} a_{ijklm}\, x^i y^j z^k w^l v^m = 0$$

$\binom{5+4}{4} = 126$ składników

rozmaitość Calabiego-Yau wymiaru 3

Hermann Schubert, 1886: liczba linii prostych na X to $n_1 = 2875$



Hipoteza (Herbert Clemens, 1984)
Dla $d \geq 1$ istnieje skończenie wiele wymiernych krzywych stopnia d na X.

Sheldon Katz, 1986: $n_2 = 609250$

$n_d :=$ liczba wym. krzywych $Y \subset X$ stopnia d

Początki Symetrii lustrzanej

A-side X | X' B-side

równanie różniczkowe dla całek - okresów

Yukawa coupling $Y(q) = 1 + \sum_{d \geq 1} N_d \, d^3 \frac{q^d}{1-q^d}$

1991
Philip Candelas
Xenia de la Ossa
Paul Green
Linda Parkes

liczby instantonów

$N_1 = 2875 = n_1$ $\quad N_2 = 609250 = n_2$ $\quad N_3 = 317206375$ ...

Geir Ellingsrud, Stein Arild Strømme, 1993: $n_3 = 317206375$

Physics wins!

Okresy w geometrii algebraicznej

(Alexander Grothendieck)

Okresami rozmaitości algebraicznej $X/\mathbb{Q}$ nazywamy liczby które pojawiają się w wyniku całkowania wymiernych k-form różniczkowych po k-cyklach topologicznych na $X(\mathbb{C})$.

$$\alpha = \int_\gamma \omega \qquad \begin{array}{l} \omega \in H^k_{dR}(X, \mathbb{Q}) \\ \gamma \in H_k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \end{array}$$

Np. $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$X(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

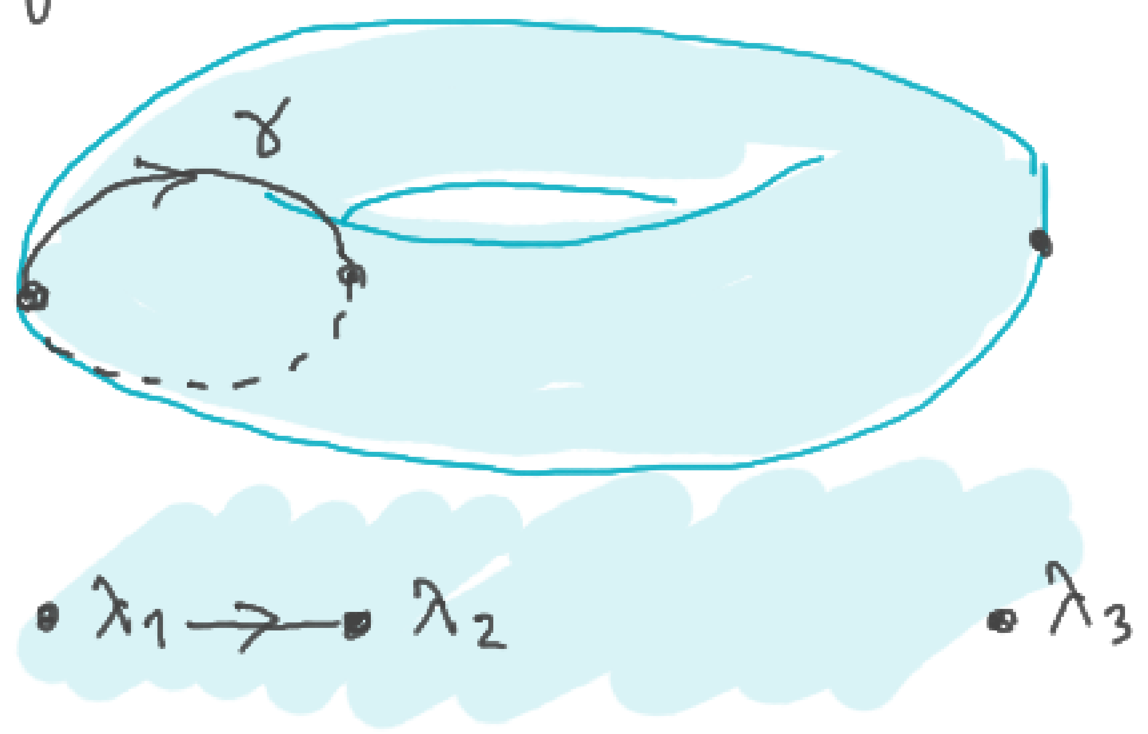
$H^1_{dR}(X, \mathbb{Q}) = \left\langle \frac{dx}{x} \right\rangle$

$\alpha = \oint \frac{dx}{x} = 2\pi i$

$$\boxed{\mathbb{Q} \subset \underbrace{\overline{\mathbb{Q}}}_{\text{liczby algebraiczne}} \subset \underbrace{\{\text{okresy}\}}_{\text{liczby geometryczne}} \subsetneq \mathbb{C}}$$

Okresy i równania różniczkowe

$$y^2=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$



$$\begin{array}{c}(x,y)\\ \downarrow\\ X\end{array}$$

krzywa eliptyczna X

$$H^1_{dR}(X)=\left\langle \frac{dx}{y},\ x\frac{dx}{y}\right\rangle$$

okresy = całki eliptyczne

$$\alpha=\int_\gamma \frac{dx}{y}=2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)}}$$

$$F(t)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

spełnia równanie różniczkowe

$$t(1-t)F''+(1-2t)F'-\frac{1}{4}F=0$$

Okresy i równania różniczkowe II

$y^2 = x(x-1)(x-t)$

parametr

rodzina Legendre'a

Wszystkie funkcje-okresy

$$F(t) = \int_{-\infty}^{0} \text{ lub } \int_{0}^{1} \text{ lub } \int_{1}^{t} \text{ lub } \int_{t}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

spełniają to samo równanie

$$t(1-t)F'' + (1-2t)F' - \frac{1}{4}F = 0$$

Równania różniczkowe Picarda-Fuchsa to równania pochodzące z geometrii algebraicznej.

Powrót do Symetrii lustrzanej

operator różniczkowy Picarda - Fuchsa

$$L = \theta^4 - 5^5 t \left(\theta + \frac{1}{5}\right)\left(\theta + \frac{2}{5}\right)\left(\theta + \frac{3}{5}\right)\left(\theta + \frac{4}{5}\right)$$

gdzie $\theta = t\frac{d}{dt}$

$t = 0$ regularna osobliwość

Rozwiązania $LF = 0$ w okolé $t=0$:

$$F_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{n!^5} t^n$$

$$F_1(t) = F_0(t)\log t + G_1(t)$$

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{n!^5}\left(\sum_{k=1}^{5n} \frac{5}{k}\right) t^n$$

$$F_2(t) = F_0(t)\frac{(\log t)^2}{2} + G_1(t)\log t + G_2(t)$$

$$F_3(t) = F_0(t)\frac{(\log t)^3}{3!} + \ldots$$

Równanie różniczkowe i arytmetyka

$$LF = 0 \qquad F_i(t) = G_0(t)\frac{(\log t)^i}{i!} + G_1(t)\frac{(\log t)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + G_i(t)$$

G_i – szeregi ze współczynnikami w $\mathbb{Q}$

Obserwacje fizyków (1991):

$$q(t) := \exp\left(\frac{F_1(t)}{F_0(t)}\right) = t\exp\left(\frac{G_1(t)}{G_0(t)}\right) = t + 770t^2 + \ldots$$

współrzędna kanoniczna $\in \mathbb{Z}[[t]]$

TO PRAWDA!
B.-H. Lian
S.-T. Yau
1996

$$\frac{F_0}{F_0} = 1 \qquad \frac{F_1}{F_0} = \log q \qquad \frac{F_2}{F_0} = \frac{1}{2}(\log q)^2 + 575q + \frac{975375}{4}q^2 + \ldots$$

$$Y(q) := \left(q\frac{d}{dq}\right)^2 \frac{F_2}{F_0} = 1 + 575q + 975375q^2 + \ldots$$

Yukawa coupling $\rightsquigarrow$ liczby instantonów $n_d \in \mathbb{Z}$ $\forall d$

Hipoteza

Mirror Theorem: $n_d = N_d \quad \forall d$

(A. Givental, B. Lian - K. Liu - S.-T. Yau, circa 1995)

geometria wyliczeniowa

n_d = "liczba" wym. krzywych $Y \subset X$ stopnia d

niezmienniki Gromova-Wittena

$n_d \in \mathbb{Q}$

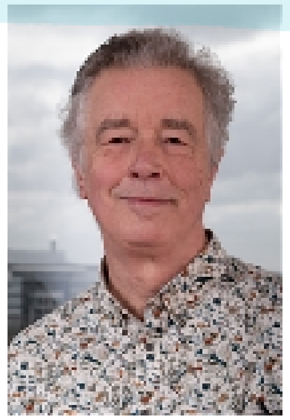
równanie różniczkowe dla okresów na X'

$$Y(q) = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} N_d\, d^3 \frac{q^d}{1-q^d}$$

liczby instantonów

$N_d \in \mathbb{Q}$

Całkowitość liczb instantonów: $N_d \in \mathbb{Z}$?



Twierdzenie (Frits Beukers - MV, 2020)

TAK dla $L = \theta^4 - 5^5 t(\theta+\frac{1}{5})(\theta+\frac{2}{5})(\theta+\frac{3}{5})(\theta+\frac{4}{5})$

oraz w kilku innych przykładach

* W 2018 E.N. Ionel i T.H. Parker udowodnili całkowitość BPS-niezmienników metodami topologii symplektycznej. Razem z Twierdzeniem lustrzanym z tego ma wynikać nasze Twierdzenie.

** Zaletą naszego dowodu jest to, że dzieje się wprost po stronie B. Używamy p-adycznej struktury Frobeniusa na L (J. Stienstra, M. Kontsevich - A. Schwarz - V. Vologodsky)

Co dalej ?

Operatory różniczkowe Calabiego-Yau

Operator rzędu 4 $\mathcal{L} = \theta^4 + \sum_{j=1}^{4} a_j(t)\,\theta^{4-j}$, $a_j \in \mathbb{Q}(t)$

nazywa się operatorem Calabiego-Yau jeżeli

- jest samopodwójny $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$
- ma regularne osobliwości
- ma maksymalnie unipotentną monodromię w $t=0$
  $a_j(0) = 0 \quad j = 1,2,3,4$
- spełnia warunki całkowitości:
  $F_0(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$, $q(t) = \exp\left(F_1(t)/F_0(t)\right) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$
  oraz $n_d \in \mathbb{Z} \quad \forall d$

D. van Straten

W. Zudilin

Jeżeli zrelaksować warunek całkowitości do N-całkowitości, około 500 takich $\mathcal{L}$ znaleziono eksperymentalnie: AESZ-tables

G. Almkvist C. van Enkevort