Задачі 9

4 $\zeta_p = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$, $\lambda : \mathbb{F}_{p^s} \to \mathbb{C}^\times$,

$\lambda(x) = \zeta_p^{Tr(x)}$

Будемо користуватись результатами із задачі 5 з 8-ї домашньої роботи про лінійність Tr і існування елементу з $\mathbb{F}_{p^s}$, на якому Tr не дорівнює 0.

i) $\lambda(x+y) = \zeta_p^{Tr(x+y)} \overset{\text{лін.}}{=} \zeta_p^{Tr\,x + Tr\,y} = \lambda(x)\lambda(y)$

ii) $\exists z \in \mathbb{F}_{p^s}$, таке що $Tr(z) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ На цьому z: $\lambda(z) = \zeta_p^{Tr(z)} \neq 1$

iii) Візьмемо z з ii). Зрозуміло, що $z \neq 0$. Маємо:

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x) = \sum_{x\in\mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x+z) \overset{i)}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x)\cdot\lambda(z) =$$

$$= \lambda(z)\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x)\right) \Rightarrow (1-\lambda(z))\sum_{x\in\mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x) = 0$$

$$\overset{ii)}{\Rightarrow} \sum_{x\in\mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x) = 0$$