2. Нехай $f(\mathbf{x})$ є многочленом від n змінних $x_1, \ldots, x_n$ з цілими коефіцієнтами. Припустимо, що для деякого $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ маємо $f(\mathbf{a}) \equiv 0 \mod p$ та $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \not\equiv 0 \mod p$ для деякого $0 \leq i \leq n$. Доведіть, що конгруенція $f(\mathbf{x}) \equiv 0 \mod p^s$ має розв'язки для будь-яких $s \geq 2$.

Задачі 6

② Розглянемо многочлен відносно однієї змінної $f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) =: g(x)$.

Тоді $g(a_i) \equiv 0 \pmod p$,

$g'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \not\equiv 0 \pmod p$

і за Лемою Гензеля $\exists!\, \hat{a}_i \bmod p^s$ для $s \geq 2$ т.щ.

$g(\hat{a}_i) \equiv 0 \pmod{p^s} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod{p^s}$

Отже, $f(\vec{x}) \equiv 0 \pmod{p^s}$ має розв'язки для будь-яких $s \geq 2$.