4. (i) Нехай $R_1, \ldots, R_k$ це комутативні кільця з одницею. Доведіть, що група одиниць прямого добутку цих кілець є прямим добутком груп їхніх одиниць: $(R_1 \times \cdots \times R_k)^\times \cong R_1^\times \times \cdots \times R_k^\times$.

(ii) Нехай $m = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ це розклад додатного цілого числа m на прості множники. Скористайтеся китайською теоремою про лишки щоби довести, що

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^\times \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z})^\times.$$

Задачі 5

4 (i) $(r_1, \ldots, r_k)$ обертовний в $R_1 \times \ldots \times R_k \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \exists (s_1, \ldots, s_k) \in R_1 \times \ldots \times R_k : (r_1, \ldots, r_k) \cdot (s_1, \ldots, s_k) =$

$= (s_1, \ldots, s_k) \cdot (r_1, \ldots, r_k) = (1_{R_1}, \ldots, 1_{R_k}) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (r_1 s_1, \ldots, r_k s_k) = (s_1 r_1, \ldots, s_k r_k) = (1_{R_1}, \ldots, 1_{R_k})$

$\Longleftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k : r_i s_i = s_i r_i = 1_{R_i} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k : r_i$ обертовний в R_i

Отже, ми довели еквівалентність $(R_1 \times \ldots \times R_k)^\times \cong R_1^\times \times \ldots \times R_k^\times$ на рівні множин

(ii) Доведемо, що якщо два ком. кільця з одиницями ізоморфні, то їх групи обернених також ізоморфні (як групи).

Нехай маємо ізоморфізм $\varphi : X \longrightarrow Y$, де X, Y — ком. кільця з 1.

Розглянемо звуження $\varphi|_{X^\times}$. ~~Очевидно, що~~ ~~воно~~ ~~буде гомоморфізмом~~ Позначимо його просто f.

Нехай $a \in X^\times$:

$1_Y \overset{(*)}{=} f(1_X) = f(a \cdot a^{-1}) \overset{(*)}{=} f(a) \cdot f(a^{-1})$, тож $f(X^\times) \subset Y^\times$.

Також з того, що φ — бієкція випливає, що f — ін'єкція. Окрім того f зберігає властивості гомоморфізма стосовно множення і того, що $f(1_X) = 1_Y$ (цими фактами ми користуємося в рівностях $(*)$)

Візьмемо $\varphi(b_1) \in Y^\times$. Тоді, $\exists \varphi(b_2) : \varphi(b_1) \cdot \varphi(b_2) = 1_Y \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \varphi(b_1 \cdot b_2) = \varphi(1_X) \xrightarrow{\text{ін'єкт}} b_1 \cdot b_2 = 1_X$

Тож $f : X^\times \longrightarrow Y^\times$ — це сюр'єкція.

Отже, маємо, що f — ізоморфізм груп $X^\times$ і $Y^\times$

Тепер за китайською теоремою про лишки для m з умови маємо, що:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z}$$

і з попередніх тверджень випливає, що:

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z})^\times \cong$$

$$\cong (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^\times \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z})^\times$$