2. Довести, що біноміальні коефіцієнти задовольняють конгруенції $\binom{p}{j} \equiv (-1)^j \pmod p$ для $0 \leq j \leq p-1$

Лема: Нехай $c \mid a$ і $bc \equiv 1 \pmod p$. Тоді $\frac{a}{c} \equiv ab \pmod p$

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{a}{c} \cdot 1 \equiv \frac{a}{c} \cdot bc \equiv \frac{a}{c} \cdot cb \equiv ab \pmod p$$

Тогда

$$\binom{p-1}{j} \equiv \frac{\prod_{i=1}^{j}(p-i)}{j!} \equiv \left(\prod_{i=1}^{j}(-i)\right)(j!)^{-1} \equiv$$

$$\equiv (-1)^j\, j!\, (j!)^{-1} \equiv (-1)^j \pmod{p}$$

обратимые в кольце $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

□