1. Нехай p є простим числом. Доведіть, що з $a \equiv b \mod p^n$ випливає, що $a^p \equiv b^p \mod p^{n+1}$

$a \equiv b \mod p^n \Rightarrow p^n | (a - b)$

$a^p - b^p = (a-b) \sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i}$

$p^n \mid (a-b) \Rightarrow p \mid (a-b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p}$

$$\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} a^i a^{p-1-i} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} a^{p-1} \equiv$$

$$\equiv p a^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

Отже $p \mid \sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i}$

Тоді $p^{n+1} \mid (a-b) \sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i} =$

$= a^p - b^p$

Тоді $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$ $\blacksquare$