2. Доведіть мультиплікативність степеня розширення: для розширень полів ~~ви~~ $F \subset K \subset L$ виконується:

$$[L:F] = [L:K]\cdot[K:F]$$

Доведення: Виберемо базис $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ поля L над K і базис $\{u_j\}_{j=1}^{m}$ поля K над F.

Покажемо, що $\{e_i u_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ є базисом L над K.

1) Покажемо, що ця система елементів є ЛНЗ над F! Нехай $\{\alpha_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ довільні числа з F і

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_i u_j = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot u_j = 0 \xRightarrow{\{e_i\}_{i=1}^{n} - \text{ЛНЗ над } K}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot u_j = 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\{u_j\}_{j=1}^{m} - \text{ЛНЗ над } F} \forall i \in \{1, \dots, n\}: \forall j \in \{1, \dots, m\}: \alpha_{ij} = 0$$

Тобто система $\{e_i u_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ – ЛНЗ над F.

Тепер покажемо що $\{e_i u_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ – повна над F.

Нехай a – довільний елемент L. Тоді з повноти $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ в L існують $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset K$ такі, що

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

З повноти $\{u_j\}_{j=1}^{m}$ в K ~~існую~~

$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \exists \{\beta_{ij}\}_{j=1}^{m} \subset F \; \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j = \alpha_i$

Тоді $\quad a = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j \right) e_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j e_i . \qquad \{\beta_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n \;\; m} \subset F$

Отже, $\{e_i u_j\}_{i=1, j=1}^{n \;\; m}$ повна в L

Тобто $\{e_i u_j\}_{i=1, j=1}^{n \;\; m}$ базис L над F

Тоді $\quad [L : F] = n \cdot m = [L : K] \cdot [K : F]$

$\boxed{}$