5. a) Доведіть, що простий елемент є незвідним.

Нехай R - область цілісності і $r \in R$ простий елемент. Покажемо, що він є незвідним.
Нехай $a | r$. Тоді $\exists b \in R$: $r = ab$
Тоді $r | ab$, а тому так як r - простий, то $r | a$ або $r | b$.
Маємо два випадки:

1) $r | a$
Тоді $\exists c \in R$: $a = rc$, а тому
$r = rcb \Rightarrow r(1 - cb) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - cb = 0 \Rightarrow c$ і b - оборотні елементи кільця, а тому r і a асоційовані елементи.

2) $r | b$
Тоді $\exists c \in R$: $b = cr$, а тому
$r = acr \Rightarrow r(1 - ac) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - ac = 0 \Rightarrow a$ і c - оборо-

інші елементи кільця.

Отже, r – незвідний елемент
кільця R.

б) Розгляньте кільце цілих $R = O_K$ квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Так як $-5 \equiv 3 \mod 4$, то

$$R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$$

$2+\sqrt{-5} \in R$. Покажемо, що цей елемент є незвідним

Для цього розглянемо „норму"
$N(a+b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2$ для $a+b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$
де $m = -5$
Для елементів R норма буде цілою, адже $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$
$N((a+b\sqrt{m})(c+d\sqrt{m})) = N(ac+mbd+(bc+ad)\sqrt{m}) =$
$= (ac+mbd)^2 - m(bc+ad)^2 =$

$N(a+b\sqrt{m})N(c+d\sqrt{m}) = (a^2-mb^2)(c^2-md^2) =$
$= a^2c^2 + m^2b^2d^2 - (b^2c^2+a^2d^2)m$

$\Rightarrow a^2c^2 + 2acbdm + m^2b^2d^2 -$
$- m(b^2c^2 + 2bcad + a^2d^2) =$
$= a^2c^2 + m^2b^2d^2 - m(b^2c^2 + a^2d^2) =$
$= N((a+b\sqrt{m})(c+d\sqrt{m}))$

Отже N є мультиплікативною

Нехай $2+\sqrt{-5} = r_1 \cdot r_2$ де
$r_1, r_2 \in R$, $r_1, r_2 \notin R^{\times}$.

Тоді $N(2+\sqrt{-5}) = N(r_1 \cdot r_2) =$
$= N(r_1)N(r_2)$

Тоді $N(r_1)N(r_2) = N(2+\sqrt{-5}) =$
$= 4-(-5)\cdot 1^2 = 9$

Тоді так як $N(r_1)$ і $N(r_2)$ цілі, то:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |N(r_1)| = 1 \\ |N(r_2)| = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} |N(r_1)| = 9 \\ |N(r_2)| = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} |N(r_1)| = 3 \\ |N(r_2)| = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Покажемо, що в $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$

$r \in R^{\times} \iff |N(r)| = 1$

Якщо $r \in R^{\times}$, то існує $r' \in R^{\times}$ таке, що $rr' = 1$, а тому

$N(r)N(r') = N(rr') = N(1) = 1$

Тоді $|N(r)|\,|N(r')| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |N(r)| = 1$ і $|N(r')| = 1$

Навпаки якщо $|N(r)| = 1$, то

~~та~~ якщо $r = a + b\sqrt{-5}$, то

$a^2 + 5b^2 = 1 \Rightarrow b = 0$ і $|a| = 1$

$\Rightarrow r = 1$ або $r = -1 \Rightarrow r \in R^{\times}$

~~От~~ Тоді єдиний можливий випадок це $N(r_1) = 3$ і $N(r_2) = 3$ (прибрали модулі, бо в $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ N невід'ємна). Нехай $r_1 = a + b\sqrt{-5}$

Тоді $3 = a^2 + 5b^2$

Неважко перевірити, що $\forall a \in \mathbb{Z}$:

$a^2 = 1 \mod 5$ або $a^2 = -1 \mod 5$

Тоді $3 \neq 1 \mod 5$ і $3 \neq -1 \mod 5$

~~то~~ Але $a^2 + 5b^2 = 1 \mod 5$

або $a^2 + 5b^2 = -1 \mod 5$

Тому отримали суперечність. Отже $2+\sqrt{-5}$ – незвідний. Покажемо, що $2+\sqrt{-5}$ не є простим.

$$(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}) = 4+5 = 9 = 3^2$$

Але $2+\sqrt{-5} \nmid 3$ адже

$$\frac{3}{2+\sqrt{-5}} = \frac{3(2-\sqrt{-5})}{4+5} = \frac{6-3\sqrt{-5}}{9} =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{-5}}{3} \notin R.$$

Отже $2+\sqrt{-5}$ не є простим елементом кільця цілих $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$