2 Довести, що число $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0{,}1100010\ldots$ є трансцендентним.

Означення: Число $x \in \mathbb{R}$ називаємо <u>числом Ліувілля</u>, якщо

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists p, q \in \mathbb{Z} \ (q > 1) \ \text{такі, що} \ 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Доведення проведемо в 3 кроки:

1. ξ - число Ліувілля
2. Числа Ліувілля ірраціональні
3. <u>Лема Ліувілля:</u> якщо x - ірраціональне алгебраїчне число степеня n, тоді $\exists c > 0 : \forall p, q \in \mathbb{Z} \ (q \neq 0) \ \left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$

Припустимо, що ξ - алгебраїчне.

Після доведення кроків 1-3 з леми Ліувілля матимемо $c_\xi > 0$ таке, що $\forall p, q \in \mathbb{Z} \ (q \neq 0)$ $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c_\xi}{q^n} \geq \frac{1}{q^{n+m}}$, де $m \geq \log_2 c_\xi + 1$.

Але з означення чисел Ліувілля для $k = n + m$ знайдемо, що $\exists p, q \in \mathbb{Z}, q > 1$ такі, що $0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^{n+m}}$, що суперечить попередньому реченню.

Отже, ξ - не алгебраїчне (тобто трансцендентне).

Отже, достатньо довести твердження 1-3.

(1) $\forall n$ покладемо $q_n = 10^{n!}$

$$p_n = 10^{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$$

Тоді

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} <$$

$$< \sum_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \cdot \frac{10}{9} =$$

$$= \frac{1}{10^{n!(n+1)}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^{n! n}} \cdot \frac{1}{10^{n!}} \cdot \frac{10}{9} < \frac{1}{10^{n! n}} = \frac{1}{(10^{n!})^n} = \frac{1}{(q_n)^n}$$

(2) Нехай ξ - довільне число Ліувілля. Покажемо, що ξ - ірраціональне.

Припустимо, що ні: $\exists c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0: \ \xi = \frac{c}{d}$

Оберемо $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q>1)$ такі як в означенні числа Ліувілля

Тоді $0 < \left|\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|cq - pd|}{|dq|} < \frac{1}{q^n} \quad \forall n$

Якщо $|cq-pd| = 0$, то це суперечить лівій нерівності

Якщо $|cq-pd| > 0$, то $|cq-pd|$ - натуральне число ≥ 1

$$\Rightarrow \left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \frac{|cq-pd|}{|dq|} \geq \frac{1}{|dq|} > \frac{1}{2^{n-1} q} \geq \frac{1}{q^n},$$

де $n > 1 + \log_2|d|$;
$q > 2$ за умовою

що суперечить правій нерівності для деякого n.

Отже $\xi \neq \frac{c}{d} \ \forall c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ $\boxed{2}$

(3) Доведемо лему Ліувілля: Нехай ξ - ірраціональне алгебраїчне число степеня n

Тоді $\exists c > 0: \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

(Взагалі кажучи, $f \in \mathbb{Q}[x]$, але помножимо f на спільний знаменник коефіцієнтів $\in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$)

Нехай $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(\xi) = 0$, $\deg f = n$, $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

Якщо $\exists r_1, \dots, r_k$ - раціональні корені f, покладемо

$$c_1 = \min_{1 \leq i \leq k} |\xi - r_i| > 0$$

Якщо $\nexists$ таких $r_1 \dots r_k$, то $c_1 = 1$.

Нехай $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{r_1, \dots, r_k\}$, $\alpha = \frac{p}{q}$ $(q > 0) \Rightarrow f(\alpha) \neq 0$

$$(*) \quad |f(\xi) - f(\alpha)| = |f(\alpha)| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{1}{q^n} q^n \left|\sum_{j=0}^{n} a_j p^j q^{-j}\right| =$$

$$= \frac{1}{q^n} \underbrace{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j p^j q^{n-j}\right|}_{\in \mathbb{N} \text{ (не є нулем, бо } f(\alpha) \neq 0)} \geq \frac{1}{q^n}$$

Також помітимо $f(\xi)-f(\alpha)=\sum_{j=0}^{n} a_j\xi^j-\sum_{j=0}^{n} a_j\alpha^j=$

$$=\sum_{j=0}^{n} a_j(\xi^j-\alpha^j)=\sum_{j=1}^{n} a_j(\xi^j-\alpha^j)=\sum_{j=1}^{n} a_j(\xi-\alpha)\sum_{i=0}^{j-1}\xi^{j-1-i}\alpha^i=$$

$$=(\xi-\alpha)\sum_{j=1}^{n} a_j\sum_{i=0}^{j-1}\xi^{j-1-i}\alpha^i$$

Розглянемо два випадки:

- $|\xi-\alpha|\le 1 \Rightarrow$ за нерівністю трикутника $|\alpha|-|\xi|\le|\xi-\alpha|\le 1$ $\Rightarrow |\alpha|\le|\xi|+1$

  Тоді $$|f(\xi)-f(\alpha)| \overset{(*)}{\le} |\xi-\alpha|\sum_{j=1}^{n}|a_j|\sum_{i=0}^{j-1}|\xi^{j-1-i}\alpha^i| \le$$
  $$\le |\xi-\alpha|\underbrace{\sum_{j=1}^{n}|a_j|\sum_{i=0}^{j-1}|\xi|^{j-1-i}(|\xi|+1)^i}_{\text{позначимо } C_\xi>0}$$

  Тоді $|\xi-\alpha|\ge\frac{1}{C_\xi}|f(\xi)-f(\alpha)|\ge\frac{1}{C_\xi}\cdot\frac{1}{q^n}$

- $|\xi-\alpha|>1$

  Тоді $|\xi-\alpha|>1\ge\frac{1}{q^n}$

Покладемо в кінці-кінців $c=\min\{c_1,\frac{1}{C_\xi},1\}$

Тоді $\forall p,q_{\neq 0}\in\mathbb{Z}$ $\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{c}{q^n}$ $\boxed{3}$