Задачі 15

(4) $g(s) = \sum_{m \geq M} c_m (s - s_0)^m$, $c_M \neq 0$

Якщо $M > 0$, то s_0 — нуль M-го порядку для g. Тоді,

$\exists \delta > 0 \ \exists! \varphi \in A(B_\delta(s_0)) \ \forall z \in B_\delta(s_0)$

$\varphi(z) \neq 0$ та $g(z) = (z - s_0)^M \varphi(z)$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{M(z-s_0)^{M-1} \cdot \varphi(z) + (z-s_0)^M \varphi'(z)}{(z-s_0)^M \varphi(z)} =$$

$$= \frac{M}{z - s_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad \forall z \in \breve{B}_\delta(s_0)$$

звідси випливає, що т-ка s_0 — полюс 1-го порядку для ф-ії $\frac{g'}{g}$ та

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0} \left(\frac{g'(s)}{g(s)} \right) = M$$

Якщо $M < 0$, то точка s_0 — полюс $(-M)$-го порядку для g. Тоді,

$\exists \delta_1 > 0 \ \exists! \psi \in A(B_{\delta_1}(s_0)) \ \forall z \in B_{\delta_1}(s_0)$

$\psi(z) \neq 0$ та $\forall z \in \breve{B}_{\delta_1}(s_0) : g(z) = \frac{\psi(z)}{(z-s_0)^{-M}}$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\frac{M}{(z-s_0)^{-M+1}} \psi(z) + (z-s_0)^M \psi'(z)}{\frac{1}{(z-s_0)^{-M}} \cdot \psi(z)} =$$

$$= \frac{M}{z - s_0} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \quad \forall z \in \breve{B}_{\delta_1}(s_0)$$

Тому, так само маємо, що

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0} \left(\frac{g'(s)}{g(s)} \right) = M$$