Задачі 13

(1) $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$

Доведемо, що $B_k = 0$ для всіх непарних $k > 1$.

Знаємо, що $B_1 = -\frac{1}{2}$

Тоді достатньо довести, що функція $f(t) = \frac{t}{e^t-1} + \frac{1}{2}t$ є парною, бо тоді всі коеф. розкладу Тейлора будуть нульовими, що доведе твердження.

$$f(t) = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2} = \frac{2t + te^t - t}{2e^t - 2} = \frac{t(1+e^t)}{2(e^t-1)}$$

$$f(-t) = \frac{(-t)\cdot(1+e^{-t})}{2(e^{-t}-1)} \cdot \frac{e^t}{e^t} = \frac{(-t)(e^t+1)}{2(1-e^t)} =$$

$$= \frac{t(1+e^t)}{2(e^t-1)} = f(t)$$, тож f – парна ■

(2) $\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}$

а) $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$

$$\frac{(-t)e^{(-t)(1-x)}}{e^{-t}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(1-x)\cdot(-1)^k \cdot \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \frac{(-t)e^{(-t)(1-x)}}{e^{-t}-1} = \frac{te^{xt-t}}{1-e^{-t}} = \frac{te^{xt}}{e^t-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

б) $\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x+y) \frac{t^k}{k!} = \frac{te^{t(x+y)}}{e^t-1} = \frac{te^{tx}}{e^t-1} \cdot e^{ty} =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \cdot \frac{t^m}{m!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} y^l \cdot \frac{t^l}{l!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=m+l} B_m(x) y^l \cdot \frac{t^{m+l}}{m!\cdot l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} B_m(x) y^{k-m} \right) \cdot \frac{t^k}{k!}$$

Тому, $B_k(x+y) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} B_m(x) y^{k-m}$

в) Доведемо, що $B_n(\frac{1}{2}) = (2^{1-n}-1)B_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-n}-1) B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-n} B_n \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{(\frac{t}{2})^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = 2 \cdot \frac{\frac{t}{2}}{e^{\frac{t}{2}}-1} - \frac{t}{e^t-1} =$$

$$= \frac{t(e^{\frac{t}{2}}+1)-t}{e^t-1} = \frac{te^{\frac{t}{2}}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t^n}{n!}$$