12.3. Покажіть, що сума p-адичного степеневого ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є p-адично неперервною функцією всередині кола збіжності $|x|_p < R$.

Доведення:

Так як p-адична норма приймає ~~дис~~ лише значення виду p^n, де $n \in \mathbb{Z}$, то

$\{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p < R\} =$

$= \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p \le p^k\}$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$.

Так як ряд збігається на колі $|x|_p = p^k$, то

$|a_n|_p \cdot p^{kn} \longrightarrow 0 \quad n \longrightarrow \infty$

Нехай ε - довільне додатне число.

Виберемо N таке, що

$\forall n > N: \quad |a_n|_p p^{kn} < \varepsilon$.

З лекцій відомо, що ~~фу~~ многочлени неперервні в $\mathbb{Z}_p$, тому $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{Z}_p :$

$|x - y| < \delta \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n\right| < \varepsilon$

Тоді $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$: ~~маємо~~: таких, що $|x-y|<\delta$ маємо:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \doteq$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n\right| \le$$

$$\le \max\left\{ \left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n\right|, \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right|, \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n\right| \right\} \textcircled{\le}$$

Зрозуміло, що $\forall M \ge N+1$:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{M} a_n x^n\right|_p \le \max_{N+1\le n\le M} |a_n x^n|_p \le$$

$$\le \max_{N+1\le n\le M} |a_n|_p \, p^{kn} < \varepsilon$$

Тоді спрямовуючи p до нескінченності отримуємо

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right|_p \le \varepsilon$$

Аналогічно $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n\right|_p \le \varepsilon$

$\textcircled{\le}\ \varepsilon$

Отже f – неперервна.