Задачі 12

① Нехай $p \neq 2$ є непарним простим чис.

$\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^*$,

$$\Gamma_p(s) = \lim_{\substack{x \to s \\ x \in \mathbb{Z}_{\geq 2}}} (-1)^x \prod_{\substack{1 \leq j < x \\ p \nmid j}} j$$

а) ~~...~~ Оскільки,

$$\Gamma_p(p^n) = -\prod_{\substack{1 \leq j < p^n \\ p \nmid j}} j \overset{\text{узаг. конгр. Вільсона}}{\equiv} 1 \pmod{p^n}, \text{ то}$$

$\Gamma_p(p^n) \to 1$, $n \to \infty$, а значить

$\Gamma_p(0) = 1$

Тепер, оскільки

$$\Gamma_p(p^n+1) = \prod_{\substack{1 \leq j < p^n+1 \\ p \nmid j}} j \equiv -1 \pmod{p^n}, \text{ то}$$

$\Gamma_p(p^n+1) \to -1$, $n \to \infty$, а значить

$\Gamma_p(1) = -1$

б) Достатньо довести на $\mathbb{Z}_{\geq 1}$, а далі продовжити за непер. на $\mathbb{Z}_p$:

$s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: $\dfrac{\Gamma_p(s+1)}{\Gamma_p(s)} =$

$$= \frac{(-1)^{s+1} \prod\limits_{\substack{1 \le j < s+1 \\ p \nmid j}} j}{(-1)^{s} \prod\limits_{\substack{1 \le j < s \\ p \nmid j}} j} = \begin{cases} -s, & \text{якщо } p \nmid s \\ -1, & \text{якщо } p \mid s \end{cases}$$

в) Достатньо довести наступну формулу на $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ і продовжити на $\mathbb{Z}_p$ за неперервністю

Якщо $s = 1$, то $\Gamma_p(1) \cdot \Gamma_p(1-1) =$

$= \Gamma_p(1) \cdot \Gamma_p(0) \overset{a)}{=} -1 \cdot 1 = -1$

Нехай маємо, що формула доведена для s, а для $s+1$ праву частину позначимо A_{n+1}: $\Gamma_p(s+1) \cdot \Gamma_p(-s) = A_{n+1}$

Скористаємось б), розглянувши два випадки:

$p | s \Rightarrow p | s_0 \Rightarrow s_0 = p$ і

$$\frac{(-1)^{s_0}}{A_{n+1}} = \frac{\Gamma_p(s) \cdot \Gamma_p(1-s)}{\Gamma_p(s+1) \cdot \Gamma_p(-s)} = \frac{\frac{\Gamma_p(1-s)}{\Gamma_p(-s)}}{\frac{\Gamma_p(s+1)}{\Gamma_p(s)}} \overset{б)}{=} \frac{-1}{-1} = 1$$

$A_{n+1} = (-1)^{s_0} \overset{p-\text{непарне}}{=} -1$

Це співпадає з правою частиною формули, бо ~~для s~~ $s+1$ відповідатиме $s_0 = 1$ і тоді $(-1)^1 = -1$

Тепер, якщо $p \nmid s \Rightarrow s_0 \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

$$\frac{(-1)^{s_0}}{A_{n+1}} = \frac{\Gamma_p(s)\Gamma_p(1-s)}{\Gamma_p(s+1)\Gamma_p(-s)} = \frac{\dfrac{\Gamma_p(1-s)}{\Gamma_p(-s)}}{\dfrac{\Gamma_p(s+1)}{\Gamma_p(s)}} =$$

$$= \frac{s}{-s} = -1,$$

$$A_{n+1} = (-1)^{s_0+1}$$

Отже, за індукцією отримали, що формула справедлива.

г) Оскільки $\frac{1}{2} = \frac{p+1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{2} p^n$ і за пунктом в):

$$\left(\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \quad (*)$$

Тому, $\left(\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{p-1} - 1 = 0$

і значить $\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)$ є одиницею Тейхмюллера, яка однозначно визначається за (*)