Теорема Островського

Будь-яка нетривіальна норма на $\mathbb{Q}$ еквівалентна до $| \ |_p$ для якогось p-простого, або еквівалентна $| \ |_\infty$

Д-ня: Нехай $\| \ \|$ – норма.

1. Якщо існує $n \in \mathbb{N}$ т.щ. $\|n\| > 1$, то нехай n_0 – найменше з них

Оскільки $\|n_0\| > 1$, то існує $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ т.щ. $\|n_0\| = n_0^\alpha$.

Розпишемо довільне $n \in \mathbb{N}$ як $n = a_0 + a_1 n_0 + \ldots + a_k n_0^k$, $a_i \in \mathbb{N}$ т.щ. $0 \le a_i < n_0$, $a_k \ne 0$.

$$\|n\| \le \|a_0\| + \|a_1 n_0\| + \ldots + \|a_k n_0^k\| = \|a_0\| + \|a_1\| n_0^\alpha + \ldots + \|a_k\| n_0^{\alpha k}$$

$$\underset{(a_i < n_0)}{\le} 1 + n_0^\alpha + \ldots + n_0^{\alpha k} = n_0^{\alpha k}\left(1/n_0^{\alpha k} + \frac{1}{n_0^{\alpha(k-1)}} + \ldots + 1\right) \underset{(n \ge n_0^k)}{\le} n^\alpha \underbrace{\left(1/n_0^{\alpha k} + \ldots + 1\right)}_{C_1}$$

З мультиплікативності норми $\|n^N\| = \|n\|^N \Rightarrow \|n^N\| \le C_1 n^{\alpha N} \Leftrightarrow \|n\| \le C_1^{1/n} n^\alpha$

$\underline{\text{при } N \to \infty \ \ \|n\| \le n^\alpha}$

В інший бік: з розкладу n по n_0 знаємо, що $n_0^k \le n < n_0^{k+1}$

$$\|n_0^{k+1}\| = \|n + n_0^{k+1} - n\| \le \|n\| + \|n_0^{k+1} - n\| \Leftrightarrow \|n\| \ge \|n_0^{k+1}\| - \|n_0^{k+1} - n\| \ge$$

$$\ge n_0^{\alpha(k+1)} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha$$

$$\|n\| \underset{(n \ge n_0^k)}{\ge} n_0^{\alpha(k+1)} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{\alpha(k+1)} \underbrace{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^\alpha\right)}_{C_2}$$

$$\ge C_2 n^\alpha$$

$\underline{\|n^N\| \ge n^\alpha \text{ для } N \to \infty.}$

Отже, маємо, що $\|n\| = n^\alpha$ для якогось $\alpha \in \mathbb{R}$ $n^\alpha = |n|^\alpha \Rightarrow \| \ \| \sim | \ |_\infty$

2) $\|n\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Нехай n_0 – мінімальне $n_0 \in \mathbb{N}$, $\|n_0\| < 1$

Заув 1: n_0 – просте

інакше $\|n_0\| = \|n_1\|\|n_2\|$, де $n_1, n_2 < n_0 \Rightarrow \|n_1\| = \|n_2\| = 1$.

Тоді $\|n_0\| = 1$. Суперечність

Заув 2: Якщо $q \neq n_0$ – просте, то $\|q\| = 1$

Якщо $\|q\| < 1$, то існує N т.щ. $\|q^N\| < 1/2$. Існує M т.щ. $\|n_0^M\| < 1/2$

$(q^N, n_0^M) = 1 \Leftrightarrow$ існ. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ т.щ. $\alpha q^N + \beta n_0^M = 1$.

$1 = \|1\| = \|\alpha q^N + \beta n_0^M\| \leq \underbrace{\|\alpha\|}_{\leq 1}\|q^N\| + \underbrace{\|\beta\|}_{\leq 1}\|n_0^M\| \leq \underbrace{\|q^N\| + \|n_0^M\|}_{< 1/2 + 1/2} < 1$. Протиріччя. $\|q\| = 1$.

Тоді маємо розклад $a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$, з мультиплікативності норми

$\|a\| = \|p_1\|^{e_1}\|p_2\|^{e_2} \dots \|p_n\|^{e_n}$. Нехай, без втрати загальності $n_0 = p_1$, тоді

$\forall i \quad 1 < i \leq n \quad \|p_i\| = 1 \Rightarrow \|a\| = \|n_0\|^{e_1} = \|n_0\|^{\mathrm{ord}_{n_0} a}$

Аналогічно існує $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ т.щ. $n_0^\gamma = \frac{1}{p} \Leftrightarrow \| \ \| \sim | \ |_p$. ⓠ