4. Теорема Островського

Кожна нетривіальна норма на $\mathbb{Q}$ еквівалентна або до $|\cdot|_p$ для деякого p або до $|\cdot|$.

Доведення: Нехай $|\cdot|_*$ - довільна нетривіальна норма на $\mathbb{Q}$.

Наша ціль довести, що $|\cdot|_*$ є деяким степенем $|\cdot|_p$ або $|\cdot|$.

Зрозуміло, що це достатньо зробити для натуральних чисел.

Більш того можемо не розглядати одиницю, адже значення довільної норми в 1 це 1.

Маємо два випадки:

1) $\exists b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: |b|_* > 1$.

Нехай a – довільне натуральне число більше одиниці.

Тоді ми можемо розкласти b^n в системі числення з основою a для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$b^n = \sum_{i=0}^{d_n} c_{in} a^i \quad \text{де } c_{in} \in \{0, \dots, a-1\}$$
$$i \quad c_{d_n n} > 0$$

$$|b|_*^n = |b^n|_* \le \sum_{i=0}^{d_n} |c_{in} a^i|_* = \sum_{i=0}^{d_n} |c_{in}|_* |a|_*^i \le$$

Нехай $K = \max\{|0|_*, |1|_*, \dots, |a-1|_*\}$

$$\le K \sum_{i=0}^{d_n} |a|_*^i \boxed{\le}$$

Якщо $|a|_* \le 1$, то $|a|_*^i \le 1$ для всіх $i \in \{0, \dots, d_n\}$

Інакше $|a|_*^i \le |a|_*^{d_n}$ для всіх $i \in \{0, \dots, d_n\}$

$\boxed{\le} K(d_n+1)\max(1, |a|_*^{d_n}) \le$

Зрозуміло, що $b^n \geq a^{d_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \ln b \geq d_n \ln a \Rightarrow d_n \leq n \log_a b$

$\le K(n \log_a b + 1) \max(1, |a|_*^{n \log_a b})$

Тоді

$$|b|_* \leq \left(K(n \log_a b + 1)\max(1, |a|_*^{n \log_a b})\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(K(n \log_a b + 1)\right)^{\frac{1}{n}} \max(1, |a|_*^{\log_a b})$$

Спрямовуючи n до ∞ отримуємо:

$$|b|_* \leq \max(1, |a|_*^{\log_a b})$$

Але ми знаємо, що $|b|_* > 1$. Отже, $|a|_*^{\log_a b} > 1$, а тому $|a|_* > 1$. З довільності a отримуємо, що $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: |a|_* > 1$.

Крім того маємо нерівність:

$$|b|_* \leq |a|_*^{\frac{\ln b}{\ln a}}$$

$$|b|_*^{\frac{1}{\ln b}} \leq |a|_*^{\frac{1}{\ln a}} \quad \forall a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$\frac{\ln|b|_*}{\ln b} \le \frac{\ln|a|_*}{\ln a} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$$

З міркувань симетрії отримуємо рівність:

$$\frac{\ln|b|_*}{\ln b} = \frac{\ln|a|_*}{\ln a}$$

Позначимо $\lambda = \frac{\ln|b|_*}{\ln b}$

$$(\ln b)\lambda = \ln|b|_*$$

$$|b|_* = b^\lambda = |b|^\lambda \quad \forall b \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$$

Тобто $|\cdot|_*$ еквівалентна до $|\cdot|$.

2) $\forall b \in \mathbb{N}\setminus\{1\}: |b|_* \le 1$

Так як $|\cdot|_*$ нетривіальна норма, то $\exists m \in \mathbb{N}$ таке, що $|m|_* < 1$. ~~Зап~~ Зрозуміло, що $m > 1$.

Запишемо розклад m на прості:

$$m = \prod_{i=1}^{d} p_i^{e_i}, \text{ це } p_i \text{ - прості}$$

Тоді $\exists j \in \{1, \dots, d\}$: $|p_j|_* < 1$ інакше $|m|_* = 1$.

Покажемо, що p_j це єдине просте число яке має неодиничну норму. Припустимо що існують два прості p і q такі, що $p \neq q$ і $|q|_* < 1$ і $|p|_* < 1$. Тоді $\exists s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ $|q^{s_1}|_* < \frac{1}{2}$ і $|p^{s_2}| < \frac{1}{2}$.

$p \neq q \Rightarrow (p^{s_2}, q^{s_1}) = 1 \Rightarrow \exists l, k \in \mathbb{Z}: lq^{s_1} + kp^{s_2} = 1$

Тому $1 = |1|_* = |lq^{s_1} + kp^{s_2}|_* \leq$

$\leq |l|_* \, |q^{s_1}|_* + |k|_* \, |p^{s_2}|_* <$

$< \dfrac{|l|_* + |k|_*}{2} \leq \dfrac{1+1}{2} = 1$

Отримали суперечність

Отже, є лише одне просте число з неодиничною нормою.

Тоді для будь-якого натурального n

$|n|_* = |p_j|_*^{\,ord_p n}$

Враховуючи, що $|p|_* < 1$, то $|\cdot|_*$ є однією з p-адичних норм.

Тобто $|\cdot|_*$ еквівалентна $|\cdot|_p$.

$\boxed{\text{VIII}}$