4. а) Доведіть, що кільце гаусових чисел $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ є евклідовою областю з нормою $\lambda(m + n \cdot i) = m^2 + n^2$

Помітимо, що евклідова норма в нашому випадку це квадрат модуля комплексного числа.

Нехай z_1 — довільний елемент з R, а z_2 — довільний елемент з $R \setminus \{0\}$. Тоді використовуючи операцію ділення визначену на комплексних числах, можемо розглянути число $\frac{z_1}{z_2}$.

Тоді $\frac{z_1}{z_2} = a + bi$ де $a, b \in \mathbb{R}$.

Зрозуміло, що існують $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ такі, що $|a - q_1| \le \frac{1}{2}$ і $|b - q_2| \le \frac{1}{2}$

(для цього в якості q_1 треба вибрати $\lfloor a \rfloor$ або $\lceil a \rceil$ в залежності від того, що буде ближчим до a, і аналогічно для q_2).

Тоді визначимо $q = q_1 + q_2 i$.

Зрозуміло, що $q \in R$.

$\lambda(z_1 - z_2 q) = |z_1 - z_2 q|^2 = |z_2|^2 \left|\frac{z_1}{z_2} - q\right|^2 =$

$= |z_2|^2 ((a - q_1)^2 + (b - q_2)^2) \leq$

$\leq |z_2|^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) = \frac{|z_2|^2}{2} < |z_2|^2 = \lambda(z_2)$

Тобто ми знайшли $q \in R$ і

$r = z_1 - z_2 q \in R$ такі, що

$z_1 = z_2 q + r$ і $\lambda(r) < \lambda(z_2)$

або $r = 0$

б)

Покажіть, що єдиними оборотними елементами є $1, -1, i, -i$

$$R^{\times} = \{1, -1, i, -i\}$$

Нехай u - оборотний елемент. Тоді $\exists v \in R: uv = 1$

Тоді

$$1 = \lambda(1) = \lambda(uv) = |uv|^2 = |u|^2 |v|^2 =$$

$= \lambda(u)\lambda(v)$

$\lambda(u)$ і $\lambda(v)$ – цілі невід'ємні числа

тому $\lambda(u) = \lambda(v) = 1$

Якщо $|m| \geq 1$ і $|n| \geq 1$, то:

$\lambda(m + ni) = m^2 + n^2 \geq 1^2 + 1^2 > 1$

Отже $\lambda(m + ni) = 1 \Rightarrow m = 0$ або $n = 0$

А тому єдині елементи R, що мають одиничну евклідову норму це $1, -1, i, -i$.

Отже, $R^{\times} = \{1, -1, i, -i\}$

в) НСД$(2+3i, 4+i)$ — ?

Поділимо $4+i$ на $2+3i$ з часткою. Для цього спочатку поділимо $4+i$ на $2+3i$ як комплексні числа:

$$\frac{4+i}{2+3i} = \frac{(4+i)(2-3i)}{4+9} = \frac{8+3+2i-12i}{13} =$$

$$= \frac{11}{13} - \frac{10}{13}i$$

В якості q_1 виберемо $1-i$

$$r_1 = 4+i - (2+3i)(1-i) =$$
$$= 4+i - (2+3+3i-2i) =$$
$$= -1$$

Тепер поділимо $2+3i$ на -1. Ділиться націло. Тобто НСД$(2+3i, 4+i) = -1$ (або 1, i чи $-i$)