

Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
Вступ до PARI/GP

0. Запустіть калькулятор PARI/GP і введіть команду яка надрукує всі прості числа $2 \leq p < 100$.

1. Нехай $\pi(x) = \#\{p : p \leq x\}$ буде кількістю простих чисел, які не перевищують x . Наприклад $\pi(3) = 2$, $\pi(10) = 4$. Теорема про розподіл простих чисел стверджує, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1.$$

Перевірте це твердження експериментально, обчисливши значення функції для великих x . Можна побудувати графік (PARI/GP це також уміє!) або записати дані у таблицю.

2. Візьмемо натуральне число $N > 1$. Теорема Діріхле стверджує, що прості числа "рівномірно розподілені" по оборотних лишках за модулем N . А саме, нехай $S = \{1 \leq a < N : (a, N) = 1\}$. Для кожного $a \in S$ позначимо

$$\pi_a(x) = \#\{p : p \leq x, p \equiv a \pmod{N}\}.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_a(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\#S}.$$

Перевірте цей факт експериментально для малого N , нп. $N = 3$.

3. Чи існує таке натуральне число $m > 1$, що більше ніж 4 різних біноміальних коефіцієнти дорівнюють m , тобто для більше ніж чотирьох різних пар чисел (n, k) маємо $\binom{n}{k} = m$?