18 квітня

§14. p-адична метрика і теорема Островського

<u>Оз-ня</u> На непустій множині X <u>відстанню</u> або <u>метрикою</u> наз-ся функція

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

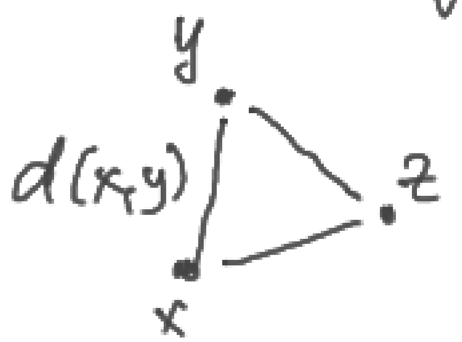
така що

(i) $d(x,y) = 0$ т.т.т.к. $x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\forall\, x, y, z \in X$



„нерівність трикутника"

Приклад: $X = \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x - y|$

Приклад відстані на полі породженої <u>нормою</u>.

<u>Оз-ня</u> Нормою на полі F наз-ся функція

$$\|\cdot\| : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

така що (i) $\|x\| = 0$ тттк $x = 0$

(ii) $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Породжена метрика це

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Вправа: перевірте, що це задовольняє оз-ню метрики.

p-адична метрика на $\mathbb{Q}$

p просте число

$a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$ord_p a$ = точний степінь p який ділить a

Нп. $a = 50 = 5^{2} \cdot 2$

$ord_5 50 = 2 \quad ord_2 50 = 1 \quad ord_3 50 = 0$

Для $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{a}{b}$

$ord_p \alpha = ord_p a - ord_p b$

не залежить від представлення: $\alpha = \frac{ac}{bc}$

$ord_p(ac) - ord_p(bc)$

$= ord_p a + \cancel{ord_p c} - ord_p b - \cancel{ord_p c}$

Домовленість: $ord_p 0 = +\infty$

$ord_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$

- $ord_p(\alpha\beta) = ord_p \alpha + ord_p \beta$
- $ord_p(\alpha + \beta) \geqslant \min(ord_p \alpha, ord_p \beta)$

причому якщо $ord_p \alpha \neq ord_p \beta$ то виконується рівність

Зафіксуємо деяке дійсне число $0 < \rho < 1$.

$\alpha \in \mathbb{Q}$

$$|\alpha|_p = \begin{cases} \rho^{ord_p(\alpha)} & \alpha \neq 0 \\ 0 & \alpha = 0 \end{cases}$$

Тв-ня 1 $|\cdot|_p$ є нормою на $\mathbb{Q}$

Дов-ня

(i) $|\alpha|_p = 0$ тттк $\alpha = 0$

ясно з

$$|\alpha|_p = \begin{cases} \rho^{ord_p(\alpha)} & \alpha \neq 0 \\ 0 & \alpha = 0 \end{cases}$$

(ii) $$|\alpha \cdot \beta|_p = \rho^{ord_p(\alpha\beta)}$$

$$= \rho^{ord_p \alpha + ord_p \beta} = |\alpha|_p \cdot |\beta|_p$$

(iii) $$|\alpha + \beta|_p = \rho^{ord_p(\alpha + \beta)}$$

$$\leq \rho^{\min(ord_p \alpha,\ ord_p \beta)}$$

$$= \max\left(\rho^{ord_p \alpha}, \rho^{ord_p \beta}\right)$$

$$= \max(|\alpha|_p, |\beta|_p)$$

$$\leq |\alpha|_p + |\beta|_p$$

сильніша нерівність трикутника

+

виконується рівність:

якщо

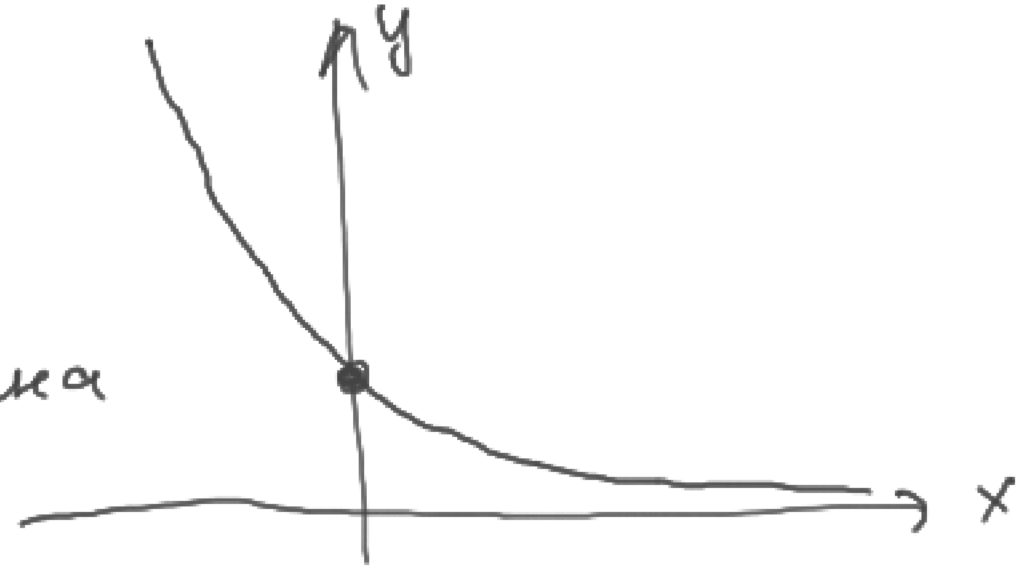
$$|\alpha|_p \neq |\beta|_p$$

то

$$|\alpha + \beta|_p = \max(|\alpha|_p, |\beta|_p) \quad \boxtimes$$

$y = \rho^x$

строго монотонна



$$|\alpha|_p = |\beta|_p \Leftrightarrow \mathrm{ord}_p \alpha = \mathrm{ord}_p \beta$$

$$d(x,y) = |x-y|_p$$ p-адична метрика на $\mathbb{Q}$

Нерівність тр-ка

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

є сильнішою: для p-адичної метрики виконується (*)

$$d(x,y) \le \max\big(d(x,z),\ d(z,y)\big)$$

$$d(x,y) = |x-y|_p = |\alpha+\beta|_p,\quad d(x,z) = |x-z|_p = |\alpha|_p,\quad d(z,y) = |z-y|_p = |\beta|_p$$

<u>Озн-ня</u> Метрика з властивістю (*) наз-ся <u>неархімедовою</u> метрикою або <u>ультраметрикою</u>.

Інші метрики наз-ся архімедовими. Нп. $d(x,y) = |x-y|$ на $\mathbb{R}$ є архімедовою.

Вправа Покажіть що у просторі з ультраметрикою

- кожен трикутник є рівнобедреним
- кожна точка кулі є її центром

- Якщо F – поле з ультранормою, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $x_1, x_2, \ldots \in F$ є збіжним т.т.т.к. $\|x_n\| \to 0$, $n \to \infty$.

(X, d) метричний простір

- Послідовність $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ елементів X наз-ся послідовністю Коші якщо для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists N$ т.щ. $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall\, n, m > N$.
- Дві метрики d, d' на X наз-ся еквівалентними якщо послідовності Коші для d є послідовностями Коші для d' і навпаки.
- Норми на полі наз-ся еквівалентними якщо породжені метрики є еквівалентними.

$(F, \|\cdot\|)$ поле з ультранормою

Для будь-якого $\delta > 0$ норма $\|\cdot\|^\delta$ є еквівалентною до $\|\cdot\|$. (вправа)

Зокрема, p-адичні норми з різними показниками ρ є еквівалентними:

$\forall \alpha \neq 0$

$$\rho_2^{\operatorname{ord}_p \alpha} = \left(\rho_1^{\log_{\rho_1} \rho_2}\right)^{\operatorname{ord}_p \alpha}$$

$$= \rho_1^{\frac{\log \rho_2}{\log \rho_1} \cdot \operatorname{ord}_p \alpha} = \left(\rho_1^{\operatorname{ord}_p \alpha}\right)^{\frac{\log \rho_2}{\log \rho_1}}$$

$$\delta = \frac{\log \rho_2}{\log \rho_1} > 0$$

Зауваження

Стандартним вибором є $\rho = \frac{1}{p}$ для $|\cdot|_p$, хоча цей вибір не має значення для теорії p-адичних чисел.

При такому виборі виконується

$$|\alpha| \cdot \prod_{p\text{ - просте}} |\alpha|_p = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha \neq 0$$

причому $|\alpha|_p = 1$ для всіх p окрім скінченної кількості (дільники знаменника і чисельника)

Тривіальною нормою на полі F наз-ся норма така що

$$\|x\| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

Вправа: перевірити, що це норма

Перевірити, що це єдина можлива норма на скінченних полях.

Теорема Островського

Кожна нетривіальна норма на $\mathbb{Q}$ еквівалентна або до $|\cdot|_p$ для деякого p або до $|\cdot|$.

Олександр Островський 1893 Київ – 1986 Монтаньола Швейцарія

Поповнення метричного простору

(X, d) метр-й пр-р

Пос-ть $\{x_n\}$ збігається до $x \in X$ якщо $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$.

Кожна збіжна пос-ть є пос-тю Коші, але зворотне твердження не вірне у загальному випадку.

Метричний пр-р X у якому кожна пос-ть Коші має границю наз-ся <u>повним</u> пр-ром.

Нп. $\mathbb{R}$ з $|\cdot|$ є повним

$\cup$

але $\mathbb{Q}$ з $|\cdot|$ не є повним

Множина $S \subset X$ наз-ся <u>щільною</u> в X якщо для $\forall x \in X$ та $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in S$ т.щ. $d(x, y) < \varepsilon$.

Нп. $\mathbb{Q}$ є щільними в $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Метричні пр-ри (X, d) та (X', d') наз-ся <u>ізометричними</u>, якщо існує бієкція $f: X \to X'$ така що $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Кожен метричний пр-р (X, d) може бути вкладений у <u>повний</u> пр-р $(\bar{X}, \bar{d})$ як щільна множина, тобто:

- $X \subset \bar{X}$
- $\forall x, y \in X$ $\bar{d}(x, y) = d(x, y)$
- X щільне в $(\bar{X}, \bar{d})$

Більше того, $(\bar{X}, \bar{d})$ є єдиним з точністю до ізометрії.

Повний пр-р $(\overline{X}, \overline{d})$ наз-ся **поповненням** пр-ру (X, d).

Ескіз конструкції поповнення:

Дві пос-ті Коші $\{x_n\}$ та $\{x_n'\}$ наз-ся еквівалентними якщо $\{x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots\}$ це знову пос-ть Коші.

$\overline{X} = \{$класи еквівалентності пос-тей Коші$\}$

$X \subset \overline{X}$

$$x \mapsto \underbrace{\{x, x, x, \ldots\}}^{\text{клас пос-ті}}$$

$$\overline{d}\left(\overset{\text{клас}}{\{x_n\}}, \overset{\text{клас}}{\{y_n\}}\right) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$

Треба перевірити, що границя існує і не залежить від вибору представників класів.

Приклад: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ є поповненням $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

План: зрозуміти поповнення $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$.

$X = \{$ класи екв-ті пос-тей Коші в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ $\}$

Вправа: • перевірити, що X з операціями

$x = $ клас $\{x_n\}$ $\quad x+y = $ клас $\{x_n + y_n\}$

$y = $ клас $\{y_n\}$ $\quad x \cdot y = $ клас $\{x_n y_n\}$

є полем.

• Покажіть що $\{x_n\}$ є пос-тю Коші тттк $|x_{n+1} - x_n|_p \to 0$, $n \to \infty$

• Пос-ті Коші $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ є еквівалентними тттк $|x_n - y_n| \to 0$, $n \to \infty$

• $\left\| \begin{matrix} \text{клас} \\ \{x_n\} \end{matrix} \right\| = \lim_{n \to \infty} |x_n|_p$ є нормою на полі X

Нагадаємо що $\mathbb{Q} \subset X$ як класи пос-тей $\{x, x, x, \dots\}$, $x \in \mathbb{Q}$.

Теорема 2 Кожен $x \in X$ з $\|x\| \le 1$ має в точності одного представника класу – пос-ть Коші $\{x_n\}$ таку що:

(i) $\underset{\text{цілі}}{0 \le x_n} < p^n \quad n = 1, 2, \ldots$

(ii) $x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Лема 3 Якщо $\alpha \in \mathbb{Q}$ і $|\alpha|_p \le 1$ тоді для $\forall$ цілого $i \geq 1$ існує $m \in \mathbb{Z}$ таке що $|\alpha - m|_p \le p^{-i}$. Це число m може бути вибране у множині $m \in \{0, 1, \ldots, p^i - 1\}$.

Дов-ня Для $\alpha = 0$ беремо $m = 0$.
Нехай $\alpha \neq 0$, $\alpha = \frac{a}{b}$ нескоротній.
$|\alpha|_p \le 1 \iff \mathrm{ord}_p(\alpha) \geq 0 \iff p \nmid b$

$(p^i, b) = 1 \quad \exists\, k, l \in \mathbb{Z}$ т. щ.

$$kb + lp^i = 1$$

kb є близьким до 1 в p-адичній метриці

Тому можна очікувати що $ka = kb \cdot \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)}_{=\alpha}$ буде близьким до α.

$\exists k, l \in \mathbb{Z}$ т.ч.

$$kb + lp^i = 1$$

$$|\alpha - ka|_p = \left|\frac{a}{b} - ka\right|_p$$

$$= \left|\frac{a}{b}\right|_p \cdot |1 - kb|_p \leq \underbrace{|1-kb|_p}_{= l \cdot p^i}$$

$|\alpha|_p \leq 1$

$\leq \rho^i$ Тобто можна взяти $m = ka$.

Додаючи до m числа кратні p^i ми збережемо властивість

$$|\alpha - m|_p \leq \rho^i$$

бо

$$|\alpha - m'|_p \leq \max(\underbrace{|\alpha - m|_p}_{\leq \rho^i}, \underbrace{|m - m'|_p}_{\leq \rho^i})$$

ділиться на p^i

$$\leq \rho^i.$$

Тому можна вибрати $m \in \{0, 1, \ldots, p^i - 1\}$ ⊠

Дов-ня теореми 2

Нехай $\{x_n\}$ це деяка пос-ть Коші в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ така що $\|\{x_n\}\| \le 1$.

Хочемо показати, що існує <u>єдина</u> еквівалентна пос-ть з властивостями (i) і (ii).

<u>Єдиність</u> Нехай $\{x_n\}$ та $\{x_n'\}$ задовольняють (i)–(ii).

Нехай n_0 є таким що $x_{n_0} \neq x'_{n_0}$. Тоді з (i) $\Rightarrow$ $x_{n_0} \not\equiv x'_{n_0} \mod p^{n_0}$.

Тоді для $\forall n \geq n_0$

$$x_n \equiv x_{n_0} \not\equiv x'_{n_0} \equiv x'_n \mod p^{n_0}$$

$$\Rightarrow |x_n - x'_n|_p > p^{n_0} \quad \forall n \geq n_0.$$

Це показує, що пос-ті Коші $\{x_n\}$ та $\{x_n'\}$ не еквівалентні.

Існування з $\|y\| \leq 1$.

Нехай $y = \{y_n\}$ це деяка пос-ть Коші в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$.

Сконструюємо $\{x_n\}$ $\sim \{y_n\}$ і задовольняє (i), (ii).

Для $j = 1, 2, 3, \ldots$ нехай $N(j)$ це таке число що

$$|y_n - y_{n'}| \leq p^j$$

для $\forall\, n, n' \geq N(j)$.

Збільшуючи $N(j)$ за потреби, можемо вважати що $j \mapsto N(j)$ зростаюча. Зокрема $N(j) \geq j$.

Покажемо що $|y_n|_p \leq 1$ коли $n \geq N(1)$:

$\forall\, n' \geq N(1)$

$$|y_n|_p \leq \max(|y_{n'}|_p, |y_n - y_{n'}|_p)$$
$$\leq \max(|y_{n'}|_p, p)$$

і $|y_{n'}|_p \to \|y\| \leq 1$ коли $n' \to \infty$.

Тому $|y_n|_p \leq 1$.

За лемою 3 для $\alpha = y_{N(j)}$ та $i = j$ існує m_j т.щ. $|\alpha - m_j|_p \le p^{j}$ і $0 \le m_j \le p^j - 1$.

Покажемо, що $m = \{m_j ; j \ge 1\}$ це шукана пос-ть Коші:

- еквівалентна $\{y_n\}$
- (i) та (ii)

$\uparrow$
ясно

(ii)

$$|m_{j+1} - m_j|_p \le \max\Big(\underset{\le p^{j+1}}{|m_{j+1} - y_{N(j+1)}|_p}, \underset{\le p^{j}}{|y_{N(j+1)} - y_{N(j)}|_p}, \underset{\le p^{j}}{|y_{N(j)} - m_j|_p}\Big)$$

$$\le p^j \Rightarrow p^j \mid (m_{j+1} - m_j)$$

$y \sim m$:

$y \sim m$: $\forall i \geq N(j)$

$$|y_i - m_i|_p \leq \max$$

$$\left(|y_i - y_{N(j)}|_p, |y_{N(j)} - m_j|_p, |m_j - m_i|_p \right) \leq \rho^j$$

$$\|y - m\| = \lim_{n\to\infty} |y_n - m_n| = 0.$$

$y \sim m$ $\boxtimes$

Теорема 2 означає, що

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\} = \mathbb{Z}_p$$

На $\mathbb{Q}_p = \{0\} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} p^m \mathbb{Z}_p^\times$

вводимо норму як

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \rho^m, & x = p^m y, \ y \in \mathbb{Z}_p^\times. \end{cases}$$

Це продовження $|\cdot|_p$ на $\mathbb{Q} < \mathbb{Q}_p$ (<u>Вправа</u>).

Зауважимо, що для пос-ті $\{x_n\}$ такої, що

(i) $0 \le x_n \le p^n - 1$

(ii) $x_{n+1} \equiv x_n \mod p^n$ $\forall n$

$$\|\{x_n\}\| = \rho^{n_0} \quad \text{де}$$

$$n_0 = \min\{n \ge 1 : x_n \ne 0\}$$

Це збігається з $|\cdot|_p$ на $\mathbb{Z}_p$.

Якщо $x \in X$ і $\|x\| > 1$,

$\{x_n\}$ представник класу,

то

$\exists m$ т.щ. $\rho^m \|x\| < 1$

Тоді $\{p^m x_n\} = p^m x$

має

$$\|p^m x\| = \rho^m \|x\| < 1$$

тому $p^m x \in \mathbb{Z}_p$

за Теоремою 2.

$\Rightarrow x \in p^{-m} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$.

$X = \mathbb{Q}_p$