Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§6. Елементарні властивості лишків: мала теорема Ферма, її узагальнення та китайська теорема про лишки

1. Нехай p є простим числом. Доведіть, що з $a \equiv b \mod p^n$ випливає, що $a^p \equiv b^p \mod p^{n+1}$.

2. Доведіть, що біноміальні коефіцієнти задовольняють конгруенціям $\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \mod p$ для $0 \leq j \leq p-1$.

3. Розв'яжіть конгруенції

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 3 &\equiv 0 \mod 9, \\ x^3 + 2x - 3 &\equiv 0 \mod 5, \\ x^3 + 2x - 3 &\equiv 0 \mod 45. \end{aligned}$$

4. (i) Нехай $R_1, \ldots, R_k$ це комутативні кільця з одницею. Доведіть, що група одиниць прямого добутку цих кілець є прямим добутком груп їхніх одиниць: $(R_1 \times \cdots \times R_k)^\times \cong R_1^\times \times \cdots \times R_k^\times$.

   (ii) Нехай $m = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ це розклад додатного цілого числа m на прості множники. Скористайтеся китайською теоремою про лишки щоби довести, що

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^\times \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z})^\times.$$

5. (i) Знайдіть всі цілі додатні числа m такі що $\phi(m) = 24$.

   (ii) Доведіть, що для кожного додатного цілого n рівність $\phi(m) = n$ виконується для скінченної кількості додатніх цілих чисел m.

6. Нехай p є непарним простим числом та $n \geq 1$. Доведіть наступне узагальнення конгруенції Вільсона:

$$\prod_{\substack{1 < j < p^n \\ p \nmid j}} j \equiv -1 \mod p^n$$

   Чи існує подібна конгруенція для $p = 2$?