Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§5. Числові поля

1. Доведіть що кожен елемент $\alpha \in K$ скінченного розширення полів K/F є алгебраїчним над F. Тобто існує многочлен $f \in F[x]$ такий що $f(\alpha) = 0$.

2. Доведіть мультиплікативність степеня розширення: для розширень полів $F \subset K \subset L$ вірно

$$[L : F] = [L : K] \cdot [K : F].$$

3. (i) Нехай $f \in \mathbb{Q}[x]$ це незвідний многочлен степеня n і $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{C}$ це всі корені $f(x)$. Покажіть що $\theta_i \neq \theta_j$ коли $i \neq j$.

   (ii) Розглянемо числове поле $K = \mathbb{Q}[x]/\langle f \rangle$ і його множину вкладень в комплексні числа $S = \{\sigma_i\}_{i=1}^n$ де $\sigma_i : K \to \mathbb{C}$ визначається як $x \mapsto \theta_i$.

   Для $\alpha \in K$ ми розглядаємо $\mathbb{Q}$-лінійний оператор $L_\alpha : K \to K$ множення на α, тобто $L_\alpha(\beta) = \alpha\beta$. Характеристичний поліном, норма і слід визначаються як

$$f_\alpha(x) = \det(x \cdot Id - L_\alpha),\ Tr(\alpha) = Tr(L_\alpha),\ N(\alpha) = \det(L_\alpha)$$

   відповідно. Доведіть, що

$$f_\alpha(x) = \prod_{\sigma \in S}(x - \sigma(\alpha)),\ Tr(\alpha) = \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha),\ N(\alpha) = \prod_{\sigma \in S} \sigma(\alpha).$$

4. Доведіть що $\mathbb{Q}$-білінійна форма $K \times K \to \mathbb{Q}$ задана як $\alpha \times \beta \to Tr(\alpha\beta)$ є невиродженою. Це значить, що якщо $Tr(\alpha\beta) = 0$ для всіх $\beta \in K$ то $\alpha = 0$.

5. (i) Порахуйте дискримінант d_K квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, де $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ є вільним від квадратів.

   (ii) Доведіть, що дискримінант числового поля K є ненульовим цілим числом: $d_K \in \mathbb{Z} \setminus 0$.

   (iii)* Доведіть порівнянння Стікельбергера для дискримінанта числового поля: d_K дає лишки 0 або 1 від ділення на 4.