Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§2. Прості елементи та однозначність факторизації
§3. Алгебраїчні числа

1. Многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ називається примітивним якщо його коефіцієнти є взаємнопростими, тобто їх найбільший спільний дільник $(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Доведіть Лему Гаусса: добуток примітивних многочленів є примітивним многочленом.

2.* Доведіть, що число

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.1100010\ldots$$

є трансцендентним. Це був один з перших прикладів трансцендентних чисел, який сконструював Жозеф Ліувілль у 1951 році.

Порада: почитайте про поняття *числа Ліувілля*, це допоможе знайти підхід до цієї задачі.

3**. Знайдіть і запишіть зрозуміле для вас доведення того, що число $\pi = 3.1415\ldots$ (довжина півкола радіуса 1) є трансцендентним.

4. Нехай $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, \pm 1$ є числом вільним від квадратів. Зафіксуємо $\sqrt{m} \in \mathbb{C}$. Переконайтеся, що множина $K = \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ є полем. Такі поля називають квадратичними, прийнятим позначенням для K є також $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Опишіть кільце цілих елементів квадратичного поля

$$\mathcal{O}_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}.$$

А саме, дайте відповідь на питання: для яких $a, b \in \mathbb{Q}$ виконується $\xi := a + b\sqrt{m} \in \overline{\mathbb{Z}}$.

Порада: для роботи над цією та наступними задачами будуть корисними поняття спряженого елемента $\overline{\xi} = a - b\sqrt{m}$, сліду $Tr(\xi) = \xi + \overline{\xi} = 2a$ та норми $N(\xi) = \xi \cdot \overline{\xi} = a^2 - mb^2$.

5. а) Доведіть, що у області цілісності кожен простий елемент є незвідним.

   б) Розгляньте кільце цілих $R = \mathcal{O}_K$ квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Покажіть, що елемент $2 + \sqrt{-5}$ є незвідним але не є простим.

6*. Доведіть, що кільця цілих $\mathcal{O}_K$ в квадратичних полях $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ є евклідовими областями для $m = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 13$ з евклідовою нормою $\lambda(\xi) = |N(\xi)|$.

Порада: означте ділене q в $\xi_1 = q\xi_2 + r$ як "найближчий"до $\xi_1/\xi_2 \in K$ елемент в $\mathcal{O}_K$ та доведіть, що такий алгоритм Евкліда є узгодженим з поданою вище функцією λ.