Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§16. Числа Бернуллі
§17. p-адичний інтеграл

1. Числа Бернуллі $\{B_k; k \geq 0\}$ є коефіцієтами Тейлора твірної функції

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Доведіть, що $B_k = 0$ для всіх непарних $k > 1$.

2. Многочлени Бернуллі $B_k(x)$, $k \geq 0$ визначаються як

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

а) Доведіть, що $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.
б) Доведіть, що $B_k(x+y) = \sum_{m=0} \binom{k}{m} B_m(x) y^{k-m}$.
в) Обчисліть $B_n(1/2)$.

3. Перевірте, що розподіл Мазура на $\mathbb{Z}_p$ заданий на p-адичних дисках як

$$\mu_{\text{Mazur}}\left(a + p^N \mathbb{Z}_p\right) = \frac{a}{p^N} - \frac{1}{2}, \qquad \forall N, \quad 0 \leq a \leq p^N - 1$$

задавольняє умові адитивності, тобто

$$\mu\left(a + p^N \mathbb{Z}_p\right) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu\left(a + bp^N + p^{N+1}\mathbb{Z}_p\right).$$

4. Нехай μ це міра на $\mathbb{Z}_p$ і $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ це p-адична неперервна функція. Для $N \geq 1$ і послідовності $\{x_{a,N}\}_{0 \leq a \leq p^N - 1}$ такої, що $x_{a,N} \in a + p^N \mathbb{Z}_p$ суми Рімана визначаються як

$$S_{N,\{x_{a,N}\}} = \sum_{a=0}^{p^N - 1} f(x_{a,N}) \mu(a + p^N \mathbb{Z}_p).$$

Покажіть, що суми Рімана мають границю в $\mathbb{Q}_p$ коли $N \to \infty$, і її значення не залежить від вибору послідовностей $\{x_{a,N}\}$ для кожного N.

Зауваження. Така границя сум Рімана позначається як $\int_{\mathbb{Z}_p} f\mu \in \mathbb{Q}_p$. Для компактної відкритої множини $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ ми позначаємо

$$\int_U f\mu = \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U f\mu,$$

де $\mathbf{1}_U(x) = 1$ коли $x \in U$ і $\mathbf{1}_U(x) = 0$ коли $x \notin U$ (фукнкція-індикатор для U).

5. Покажіть, що для міри $\mu = \mu_{1,\alpha}$, яка задається як регуляризація розподілу Мазура

$$\mu_{1,\alpha}(U) = \mu_{\text{Mazur}}(U) - \alpha^{-1}\mu_{\text{Mazur}}(\alpha U)$$

з $\alpha = 1 + p$, виконується

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-1}\mu_{1,\alpha} \equiv -1 \mod p.$$

Експеримент: для парних $k \geq 2$ обчисліть числа

$$B_k + \sum_{p:(p-1)|k} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

за допомогою PARI/GP. Те, що ці числа є цілими, ми довели на лекції.