Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§13. Кільце $p$-адичних цілих чисел

1. Запишіть $p$-адичний розклад чисел $-1$ та $1/2$ коли $p > 2$.

2. Охарактеризуйте кільце $\mathbb{Z}$ всередині $\mathbb{Z}_p$. Іншими словами, для елемента $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p$ запишіть необхідну і достатню умову за якої $x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$.

3. Для яких простих $p < 20$ многочлен $x^2 - 3$ має корені в $\mathbb{Z}_p$?

4. Доведіть, що в $\mathbb{Z}_p$ немає інших коренів з 1 крім одиниць Тейхмюллера.

5. Для числа $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ порядком $p$ в $m$ називається найбільше невід'ємне ціле число $e \geq 0$ таке що $p^e | m$. Порядок позначається як $e = ord_p(m)$. Доведіть, що
$$ord_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1},$$
де $S_p(n)$ це сума цифр запису $n$ у базі $p$. Тобто коли $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_r p^r$ з цифрами $a_0, \dots, a_r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, то $S_p(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_r$.

6. Означення порядку $p$ поширюється на ненульові раціональні числа як $ord_p(m/k) = ord_p(m) - ord_p(k)$. За домовленістю $ord_p(0) = +\infty$, тому отримуємо функцію $ord_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Доведіть наступні властивості цієї функції:

   а) $ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta)$ для $\alpha, \beta \neq 0$,
   б) $ord_p(\alpha + \beta) \geq \min(ord_p(\alpha), ord_p(\beta))$,
   в) якщо $ord_p(\alpha) \neq ord_p(\beta)$, то в б) виконується рівність.