Теорія чисел - весняний семестр 2023 року

§1. Подільність та алгоритм Евкліда

1. а) Подайте приклад трьох натуральних чисел які є взаємно прости-ми але не є взаємнопростими у парах.
   б) Доведіть що існує нескінченно багато простих чисел.
   в) Покажіть, що існують як завгодно великі інтервали між сусідніми простими числами.

2. а) Користуючись алгоритмом Евкліда знайдіть найбільший спільний дільник g чисел 7469 та 2464. Запишіть дію алгоритму крок за кроком.
   б) Знайдіть деякі цілі числа x та y такі що $7469x + 2464y = g$. Опишіть всі пари цілих чисел (x, y) які задовольняють цьому рівнянню.

3. а) Користуючись алгоритмом Евкліда знайдіть найбільший спільний дільник $h(x)$ многочленів $f(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ та $g(x) = x^8 + 5x^4 - 6$.
   б) Чи існують многочлени $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[x]$ такі що

$$x^{2023} - 1 = h_1(x)f(x) + h_2(x)g(x)?$$

4. Область цілісності R називається евклідовою областю якщо існує функція (*евклідова норма*)

$$\lambda : R \setminus \{0\} \to \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

така, що можливе ділення з остачею за нормою меншою ніж дільник. Тобто для кожних $a, b \in R$, $b \neq 0$ існують $q, r \in R$ такі що $a = bq + r$ і або $r = 0$ або $\lambda(r) < \lambda(b)$.

   а) Доведіть, що кільце гауссових чисел $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$ є евклідовою областю з нормою $\lambda(m + n\sqrt{-1}) = m^2 + n^2$.
   б) Покажіть що єдиними оборотними елементами цього кільця є ± 1 та $\pm\sqrt{-1}$, тобто

$$R^\times = \{1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}.$$

   в) Користуючись алгоритмом Евкліда знайдіть найбільший спільний дільник гауссових чисел $2 + 3\sqrt{-1}$ та $4 + \sqrt{-1}$.

5*. Для ненульового вільного від квадратів числа $d \in \mathbb{Z}$ розглянемо кільце

$$R_d = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} = \{m + n\sqrt{d} : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Доведіть, що R_d є евклідовою областю для $d = -2, 2, 3$ з нормою $\lambda(m + n\sqrt{d}) = |m^2 - dn^2|$.

Зауваження: спочатку в цьому завданні було додано число $d = -3$. Станіслав Зубко зауважив, що для $d = -3$ твердження невірне. Цікаво, що R_{-3} вкладається у кільце цілих елементів $\mathcal{O}_K$ поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, і це кільце $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ є евклідовою областю з поданою вище нормою. Див. наступне домашнє завдання, задача 6* до §2 – §3.