Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів

В. Кошманенко (Інститут математики НАН України, Київ)

Створивши світ,
Бог кожному призначив місце,
та диявол винайшов конфлікт

Анотація

The mathematical conflict model with discrete set of position is investigated.
Досліджується математична модель конфлікту з дискретним набором позицій.

1 Вступ

У роботі запропоновано математичну модель конфлікту зі скінченним набором позицій для двох противників. Сумарний розподіл імовірності захоплення довільної позиції дорівнює одиниці для кожного з противників, тобто a priori противники вважаються незнищенними. Боротьба іде лише за "справедливий"перерозподіл конфліктних позицій.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_d\}, d \geq 2$ позначає скінчену множину позицій, що їх претендує зайняти (окупувати) кожна з двох альтернативних сторін (противників), яких позначаємо A та B. Повна ймовірність присутності на множині Ω для обох сторін вважається постійною і нормованою на одиницю, тобто $P_A(\Omega) = P_B(\Omega) = 1$. Початковий і незалежний від наявності противника розподіл імовірності присутності кожної зі сторін A та B по позиціях $\omega_i, i = 1, 2, ...d$ довільний:

$$1 = \sum_{i=1}^{d} P_A(\omega_i) = \sum_{i=1}^{d} p_i, p_i \geq 0$$

$$1 = \sum_{i=1}^{d} P_B(\omega_i) = \sum_{i=1}^{d} q_i, q_i \geq 0.$$

Суть конфлікту полягає в неможливості окупувати спірну позицію ω_i противниками A чи B одночасно. Задача полягає в побудові математичної композиції конфлікту між векторами $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_d)$ та $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ...q_d)$, дослідженні еволюції перерозподілу імовірностей $P_A(\omega_i) = p_i$ і $P_B(\omega_i) = q_i$, $i = 1, 2, ...d$ відносно конфліктної композиції, та знаходженні інваріантних станів.

2 Композиція конфлікту для стохастичних векторів

Вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_d) \in \mathbf{R}^d, d \geq 2$ зветься стохастичним, якщо його координати невід'ємні, $p_i \geq 0, i = 1, 2, ...d$, і $l^{\mathbf{1}}$ - норма одинична, $\mid \mathbf{p} \mid = \sum_{i=1}^{d} p_i = 1$.

Кожна пара стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^d$ утворює конфліктну систему, яка нетривіальна, якщо скалярний добуток $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq 0$ і тривіальна, якщо $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$. Випадок $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{1}_i$, де $\mathbf{1}_i = (\underbrace{0, ...0}_{i-1}, 1, 0, ...0)$ відповідає колапс-стану.

Некомутативна конфліктна композиція (позначення $\divideontimes$) між стохастичними векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ з координатами $p_i^{(0)}, q_i^{(0)},\ i = 1, 2, ...d$ визначається таким чином. Парі $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ ставиться у відповідність нова пара стохастичних векторів:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 \divideontimes \mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^0 \divideontimes \mathbf{p}^0,$$

з координатами:

$$p_i^{(1)} := \frac{1}{z_1} p_i^{(0)} \cdot (1 - q_i^{(0)}) \equiv \frac{1}{z_1} p_i^{(0)} \cdot q_i^{(0),c}, \tag{1}$$

$$q_i^{(1)} := \frac{1}{z_1} q_i^{(0)} \cdot (1 - p_i^{(0)}) \equiv \frac{1}{z_1} q_i^{(0)} \cdot p_i^{(0),c},$$

де нормуючий коефіцієнт z_1 фіксується умовою стохастичності, $\mid \mathbf{p}^1 \mid = \mid \mathbf{q}^1 \mid = 1$:

$$z_1 = 1 - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0). \tag{2}$$

Координати $p_i^{(1)}, q_i^{(1)}$ в (1) визначені коректно за винятком випадку, коли $\mathbf{p}^0 = \mathbf{1}_i = \mathbf{q}^0$. Степінь конфліктної композиції (позначення $\overset{n}{\divideontimes}$, $n = 1, 2, ...$) між векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ визначається індуктивно:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^0 \overset{n}{\divideontimes} \mathbf{q}^0 := \mathbf{p}^{n-1} \divideontimes \mathbf{q}^{n-1},$$

$$\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^0 \overset{n}{\divideontimes} \mathbf{p}^0 := \mathbf{q}^{n-1} \divideontimes \mathbf{p}^{n-1},$$

де координати векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ задаються формулами:

$$p_i^{(n)} := \frac{1}{z_n} p_i^{(n-1)} \cdot (1 - q_i^{(n-1)}) \equiv \frac{1}{z_n} \cdot p_i^{(n-1)} \cdot q_i^{(n-1),c}, \tag{3}$$

$$q_i^{(n)} := \frac{1}{z_n} q_i^{(n-1)} \cdot (1 - p_i^{(n-1)}) \equiv \frac{1}{z_n} \cdot q_i^{(n-1)} \cdot p_i^{(n-1),c},$$

з

$$z_n = 1 - (\mathbf{p}^{n-1}, \mathbf{q}^{n-1}).$$

Для фіксованої пари стохастичних векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ матриця

$$M^n = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} & ... & p_d^{(n)} \\ q_1^{(n)} & q_2^{(n)} & ... & q_d^{(n)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

зветься станом конфліктної системи на n-му кроці конфлікту. Еволюція початкового стану M^0 асоційованого з парою $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ задається перетворенням:

$$U(\overset{n}{\divideontimes}) M^0 = M^n.$$

Задача полягає в дослідженні траєкторій станів для конфліктної системи з довільними початковими векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}^d$, зокрема в доведенні існування граничних інваріантних станів, $M^\infty = \lim_{n\to\infty} M^n, \;\; U(\circledast)M^\infty = M^\infty$, та описі їх структури.

3 Приклад

Розглянемо в $\mathbf{R}^2$ пару стохастичних векторів $\mathbf{p}^0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}), \mathbf{q}^0 = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}), \;\; p_i^{(0)} \neq 0 \neq q_i^{(0)}$. В силу (1) вже перший крок конфліктної композиції приводить до симетричного стану:

$$U(\overset{1}{\circledast}) \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \\ q_1^{(0)} & q_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Твердження 1. *Для довільної пари стохастичних векторів* $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$ *з* $\mathbf{R}^2$ *послідовність станів* $M^n = U(\overset{n}{\circledast})M^0 = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} \\ q_1^{(n)} & q_2^{(n)} \end{pmatrix}$ *збігається до одного з інваріантних станів:* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *або* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Якщо* $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{1}_i, \; i = 1, 2,$ *то* $M^1 = M^\infty = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Доведення. Без втрати загальності можна покласти, $M^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $0 < a < 1/2$. Тоді $M^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, де $a_1 = \frac{a^2}{a^2+b^2} = ak_1$, $k_1 = \frac{a}{2a^2-2a+1} < 1$ оскільки $a < a^2 + b^2$ при $a < 1/2$. Отже, $a_1 < a$. За індукцією,

$$a_n = a_{n-1}k_n = ak_1...k_n,$$

де $k_n < 1$ і $a_n < a_{n-1}$. Це означає, що $a_n \to 0$ і, відповідно, $b_n \to 1$, при $n \to \infty$. У випадку $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{1}_i$ безпосередньо перевіряється, що не пізніше ніж на першому кроці конфліктна композиція приводить до рівноважного стану $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. ■

4 Теорема про конфлікт

Теорема. *Для довільної пари стохастичних векторів* $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}^d, d \geq 2$, $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$, *які утворюють нетривіальну конфліктну систему,* $(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) \neq 0$, *послідовність станів* M^n *визначених згідно з (1) - (4) збігається до інваріантного стану:*

$$M^\infty = \lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} & ... & p_d^{(\infty)} \\ q_1^{(\infty)} & q_2^{(\infty)} & ... & q_d^{(\infty)} \end{pmatrix}, \; U(\circledast)M^\infty = M^\infty. \tag{5}$$

При цьому граничні вектори $\mathbf{p}^\infty = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)}, ..., p_d^{(\infty)}), \; \mathbf{q}^\infty = (q_1^{(\infty)}, q_2^{(\infty)}, ..., q_d^{(\infty)})$ *асоційовані з станом* M^∞ *ортогональні*

$$\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{q}^\infty. \tag{6}$$

Якщо початкові вектори однакові, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, *та* $p_i^{(\infty)} = q_i^{(\infty)} \neq 0$ *для усіх* $i = 1, 2, ..., d$ *(випадок* $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 = \mathbf{1}_i$ *виключається), то граничні вектори також однакові,* $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{q}^\infty$, *і мають рівномірний розподіл:*

$$p_i^{(\infty)} = q_i^{(\infty)} = 1/d. \tag{7}$$

Доведення. У випадку $d = 2$ справедливість теореми випливає з Твердження 1. Нехай $d \geq 3$, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$ і $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, ..., d$. Тоді очевидно $p_i^{(n)} = q_i^{(n)} \neq 0$ для усіх n також. Без втрати загальності координати вектора $\mathbf{p}^0$ можна вважати впорядкованими:

$$0 < {p_1}^{(0)} \leq {p_2}^{(0)} \leq ... \leq {p_d}^{(0)} < 1. \tag{8}$$

В силу $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, числа $q_i^{(0),c} = 1 - q_i^{(0)}$ мають зворотну впорядкованість

$$1 > q_1^{(0),c} \geq q_2^{(0),c} \geq ... \geq q_d^{(0),c} > 0, \tag{9}$$

З (9) випливає, що

$$q_1^{(0),c} > z_1 > q_d^{(0),c} \tag{10}$$

Справді, за означенням,

$$z_1 = 1 - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) = \sum_i p_i^{(0)} q_i^{(0),c}.$$

Тому, замінюючи в останній сумі всі числа $q_i^{(0),c}$ на $q_1^{(0),c}$ (або на $q_d^{(0),c}$) в силу (9) одержуємо (10), при цьому використано рівність $\sum\limits_i p_i^{(0)} = 1$.

Тепер покажемо, що координати вектора $\mathbf{p}^1$ задовольняють нерівності:

$$p_1^{(0)} < p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_d^{(1)} < p_d^{(0)}, i = 1, 2, ..., d \tag{11}$$

Справді, з (10) безпосередньо випливає, що $p_1^{(0)} < p_1^{(1)}$, та $p_d^{(1)} < p_d^{(0)}$. Для доведення нерівностей $p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_d^{(1)}$ зауважимо,що їх можна еквівалентно переписати у вигляді

$$p_1^{(0)}(1 - p_1^{(0)}) \leq p_i^{(0)}(1 - p_i^{(0)}) \leq p_d^{(0)}(1 - p_d^{(0)}).$$

Останні співвідношення справедливі завдяки тому, що функція $y = x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$ має симетричний гафік відносно точки $x = 1/2$, в якій вона досягає максимуму. Тому

$$y(p_1^{(0)}) \leq y(x) \leq y(1 - p_d^{(0)})$$

для будь-якої точки $x = p_i^{(0)}$ при умовах: $d \geq 3$, $\sum\limits_i p_i^{(0)} = 1$ та $\min\limits_i p_i^{(0)} \leq x \leq \max\limits_i p_i^{(0)}$. За індукцією нерівності (11) продовжуються на координати вектора $\mathbf{p}^n$ з довільним n:

$$p_1^{(0)} < p_1^{(1)} < \cdots < p_1^{(n)} \leq p_i^{(n)} \leq p_d^{(n)} < \cdots < p_d^{(1)} < p_d^{(0)}.$$

В силу стохастичності

$$\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)} = 1/d = \lim_{n\to\infty} q_i^{(n)}, i = 1, 2, ..., d, \tag{12}$$

що доводить (7). Зрозуміло, що у випадку $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$ лише для $i = 1, 2, ..., m < d$, в (12) границі дорівнюють $1/m$.

У випадку $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$ в силу (1) з $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ випливає, що $p_i^{(1)} > q_i^{(1)}$, а також $p_i^{(n)} > q_i^{(n)}$ для усіх n. Більш того, якщо $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, то з необхідністю

$$q_i^{(0)} \to 0, n \to \infty. \tag{13}$$

для доведення (13) достатньо показати, що відношення

$$c_i^{(n)} := \frac{p_i^{(n)}}{q_i^{(n)}} \to \infty, n \to \infty$$

Очевидно $c_i^{(0)} > 1$ і в силу $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ $k_i^{(0)} := \frac{1-q_i^{(0)}}{1-p_i^{(0)}} > 1$. Тому $c_i^{(0)} < c_i^{(1)} = c_i^{(0)} \cdot k_i^{(0)}$.

За індукцією

$$1 < c_i^{(0)} < c_i^{(1)} < ... < c_i^{(n)} < c_i^{(n+1)} = c_i^{(n)} \cdot k_i^{(n)} = c_i^{(0)} \cdot k_i^{(0)} \cdot ... \cdot k_i^{(n)}.$$

Більше того, коефіцієнти $k_i^{(n)}$ строго зростають при $n \to \infty$:

$$1 < k_i^{(0)} < k_i^{(1)} < ... < k_i^{(n)}. \tag{14}$$

Справді, для $k_i^{(1)}$ маємо

$$k_i^{(1)} = \frac{1-q_i^{(1)}}{1-p_i^{(1)}} = \frac{1-\frac{1}{z_1}q_i^{(0)}(1-p_i^{(0)})}{1-\frac{1}{z_1}p_i^{(0)}(1-q_i^{(0)})} = \frac{z_1 - q_i^{(0)}(1-p_i^{(0)})}{z_1 - p_i^{(0)}(1-q_i^{(0)})}$$
$$= \frac{1-q_i^{(0)} - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) + q_i^{(0)}p_i^{(0)}}{1-p_i^{(0)} - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) + q_i^{(0)}p_i^{(0)}} = \frac{1-q_i^{(0)} - I_i^0}{1-p_i^{(0)} - I_i^0},$$

де

$$0 < I_i^0 := (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) - p_i^{(0)}q_i^{(0)} = \sum_{k \neq i} p_k^{(0)}q_k^{(0)} < \sum_{k \neq i} p_k^{(0)} = 1 - p_k^{(0)}$$

Очевидно, що

$$1 < k_i^{(0)} = \frac{1-q_i^{(0)}}{1-p_i^{(0)}} < k_i^{(1)} = \frac{1-q_i^{(0)} - I_i^0}{1-p_i^{(0)} - I_i^0}.$$

Аналогічно доводиться, що $k_i^{(1)} < k_i^{(2)}$, і за індукцією одержуємо (14). Отже, з $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ випливає, що $c_i^{(n)} \to \infty$ і тому $q_i^{(n)} \to 0$, бо усі $p_i^{(n)}$ обмежені. Аналогічно, з $p_k^{(0)} < q_k^{(0)}$ випливає, що $p_k^{(n)} \to 0$. Це означає, що $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \to 0$ і $z_n \to 1$ при умові, що множина індексів

$$\Omega_0 := \{i : p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0\} = \emptyset.$$

А це, у свою чергу, означає, що при $n \to \infty$ існують границі:

$$\begin{aligned} p_i^{(n)} &\to p_i^{(\infty)} \in [0,1], \ (p_i^{(0)} > q_i^{(0)}) \\ q_k^{(n)} &\to q_k^{(\infty)} \in [0,1], \ (q_k^{(0)} > p_k^{(0)}) \end{aligned} \tag{15}$$

і $(\mathbf{p}^\infty, \mathbf{q}^\infty) = 0$.

У випадку $\Omega_0 \neq \emptyset$, $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$, доведення теореми складніше. Припустимо, що хоча б для одного $j \in \Omega_0$ послідовність $p_j^{(n)}$, не збігається до нуля при $n \to \infty$. Тоді сума $\sum\limits_i (p_j^n)^2$ також не збігається до нуля, а z_n до 1. У цьому випадку граничні значення $p_i^{(\infty)}, q_k^{(\infty)}$, $i, k \notin \Omega_0$ в (15) існують і є строго додатними. Це видно з формул (3), оскільки вже доведено, що $q_i^{(n)} \to 0$ $(p_i^{(0)} > q_i^{(0)})$. Тому в силу припущення нормуючий коефіцієнт можна записати у вигляді

$$z_n = 1 - \epsilon_n - \sum_{j \in \Omega_0} (p_j^{(n)})^2, \text{де } \epsilon_n \to 0$$

це означає, що хоча б для якоїсь підпослідовності $n_k \to \infty$ числа $p_j^{(n_k)}$ та $\sum\limits_{j \in \Omega_0} \left(p_j^{(n_k)}\right)^2$ мають однакову асимптотику. При цьому остання послідовність повинна збігатися до 1 в силу стохастичності векторів $\mathbf{p}^n$. Враховуюич, що $p_j^{(n_k)}$ не прямує до 1, бо існують $p_i^{(\infty)} \neq 0, i \notin \Omega_0$, робимо висновок, що з необхідністю

$$p_j^{(n)} \to 0, j \in \Omega_0, n \to \infty,$$

і, отже, $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \to 0$ в загальному випадку.

5 Дискусія

Згідно доведеної вище теореми про конфлікт, композиція $\divideontimes$ (див. (1)) має чисто відштовхувальний (repelling) ефект. В результаті, різні супротивники з нетривіальної конфліктної системи, після нескінченної (в загальному випадку) боротьби розходяться ортогонально. Тому на границі спірні позиції відсутні: принаймні одна з координат $p_i^{(\infty)}$ $q_i^{(\infty)}$ дорівнює нулю. Рівномірний розподіл реалізується лише для ідентичних сторін.

Зрозуміло, що для побудови досконалішої моделі конфліктів необхідно врахувати природний притягальний (attracting) ефект, який реально проявляється в зростанні коефіцієнтів (координат) претензій окупувати певні позиції одночасно кожною з протилежних сторін. Математично це досягається введенням функціональної (керованої) залежності координат $p_i^{(n)}$, $q_i^{(n)}$ від часу: $p_i^{(n)}(t)$, $q_i^{(n)}(t)$. Наприклад, на кожному кроці композиції $\divideontimes$ координати $p_i^{(n)}, q_i^{(n)}$ можуть додатково експоненціально залежати від аргументу по t. Це означає перехід до побудови керованих конфліктних моделей. Закон перетворення функцій розподілу станів (координат $p_i^{(n)}(t)$, $q_i^{(n)}(t)$) можна також задавати стохастичними квадратними матрицями (див. [1]).

Відзначимо, що в запропонованій моделі не використовуються поняття платіжної (payoff) функції - основного об'єкту звичайної теорії ігор [2] - [7]. Це обумовлено принципом незнищенності пртивників. Жодна з сторін не може ані виграти, ані програти, а результатом, згідно теореми, є безконфліктний стан. В наступній публікації буде показано, що введена в цій статті композиція конфлікту $\divideontimes$ породжує в просторі $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ векторну динамічну систему, значно складнішу одновимірної [8].

Література

[1] А. Чикрий, К.Г. Дзюбенко, Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. - 1999. - N 1. С.92-106.

[2] N.N. Vorob'ev, Translated and supplemented by S. Kotz. Applications of Mathematics // Game theory. Lectures for economists and systems scientists. - New York - Berlin: Springer-Verlag, 1977, Vol. 7.

[3] A. J. Jones, Mathematics and its Applications. Game theory: mathematical models of conflict. - New York-Chichester-Brisbane, 1980.

[4] G. Owen, Game theory, Third edition. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995.

[5] J. S. Armstrong, Assessing Game Theory, Role Playing, and Unaided Judgment, forthcoming in the // International Journal of Forecasting. - 2002.

[6] H. Gintis, A Markov model of production, trade, and money: theory and artificial life simulation. // Comput. Math. Organ. Theory. - 1997. - **3**, N 1, P. 19–41.

[7] K. C. Green, Forecasting decisions in conflict situations: A comparison of game theory, role-playing, and unaided judgment, forthcoming in the // International Journal of Forecasting. - 2002.

[8] W. de Melo, S. van Strien, One-Dimensional Dynamics, Springer. - Springer, 1993.