Теорема про корону

Резюме. Ми розглянемо алгебру $H^\infty(D)$ — банахову алгебру обмежених аналітичних функцій у відкритому одиничному крузі. Круг D гомеоморфно вкладається у простір максимальних ідеалів $\mathfrak{M}(D)$ алгебри $H^\infty(D)$, тоді увесь простір максимальних ідеалів можна розуміти собі як об'єднання диска D з певним розшаруванням над його границею (інтуїтивно простір $\mathfrak{M}(D) \setminus D$ — це така собі "корона"). Класична теорема Карлесона (теорема про корону) стверджує, що одиничний круг D щільний в $\mathfrak{M}(D)$ (іншими словами "корона" $\mathfrak{M}(D) \setminus \overline{D}$ порожня). Теорема про корону допускає і інше формулювання, що пов'язане з існуванням лінійного співвідношення (інакше, розв'язком рівняння Безу) $f_i g_i + \ldots + f_n g_n = 1$, для довільних функцій $f_i \in H^\infty(D)$, що не мають спільних нулів в D. Ми також розглянемо деякий некомутативний (операторний) аналог теореми про корону.

1. Алгебра обмежених аналітичних функцій у крузі та її простір максимальних ідеалів

Нехай $D = \{\ z \in \mathbb{C} \ \big|\ |z| < 1\}$. Розглянемо комплексний векторний простір $H^\infty(D)$ — простір аналітичних обмежених функцій у D. Відносно норми

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

цей простір банахів, більш того — це комутативна банахова алгебра з одиницею. Класична теорема Гельфанда-Наймарка дозволяє реалізувати цю алгебру як підалгебру неперервних функцій на деякому компактному просторі, який називається простором максимальних ідеалів алгебри H^∞. Нагадаємо конструкцію (більш детально див., наприклад, [5]). Нехай задана довільна комутативна банахова алгебра $\mathcal{A}$ (вважатимемо, що вона з одиницею). Розглянемо у цій алгебрі нетривіальні ($\phi \neq 0$) мультиплікативні функціонали:

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Кожному такому функціоналу ϕ відповідає максимальний ідеал M_ϕ алгебри $\mathcal{A}$, $M_\phi = \ker\phi$, та навпаки, маючи максимальний ідеал, єдиним чином можна відновити мультиплікативний функціонал, що обнуляється на цьому ідеалі. Множину максимальних ідеалів позначатимемо $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. На множині $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ можна ввести $*$-слабку топологію спряженого простору $\mathcal{A}^*$, максимальні ідеали лежать на одиничній кулі $\mathcal{A}^*$, тому це компактний простір відносно введеної топології (якщо алгебра $\mathcal{A}$ без одиниці — він локально-компактний). Перетворення

Гельфанда $\widehat{\ }$ ставить у відповідність довільному елементу $a \in \mathcal{A}$ певну неперервну функцію $\widehat{a} \in C(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$:

$$\widehat{\ }: \mathcal{A} \to C(\mathfrak{M}(\mathcal{A})),$$
$$\widehat{a} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C},$$
$$\widehat{a} : \phi \mapsto \phi(a).$$

Класична теорема Гельфанда-Наймарка стверджує, що $\widehat{\ }$ встановлює гомоморфізм між алгеброю $\mathcal{A}$ та алгеброю $C(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$.

Повернемося до алгебри $H^\infty(D)$. Ми розглянемо більш детально, як влаштований простір максимальних ідеалів $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H^\infty(D))$ алгебри $H^\infty(D)$, наша найближча ціль — отримати представлення:

$$\mathfrak{M} = D \cup \bigcup_{\xi \in \partial D} \mathfrak{M}_\xi.$$

Найпростішими мультиплікативними функціоналами є функціонали значень у точці (дельта-функції): $\phi_\xi \in \mathfrak{M}$, $\xi \in D$, $\phi_\xi(f) = f(\xi)$. Ясно, що існують і інші гомоморфізми. Наприклад, якщо I — множина таких функцій $f \in H^\infty D$, що $f(\lambda) \to 0$, коли $\lambda \to 1$ на додатній осі, то I— власний ідеал $H^\infty D$. Тому I міститься у деякому максимальному ідеалі, тобто існує $\phi \in \mathfrak{M}$, такий, що $\phi(f)$ для усіх $f \in I$. Але ϕ не співпадає з жодним функціоналом ϕ_λ, оскільки не існує точки у якій усі функції перетворюються у нуль. Прикладів таких "нових" функціоналів можна побудувати багато.

Існує природнє неперервне відображення $\mathfrak{M}$ у замкнутий одиничний круг. Позначимо через Z продовження $\widehat{z}$ координатної функції z, $Z = \hat{z}$.

Вправа 1. *Показати, що Z відображає $\mathfrak{M}$ на диск $\overline{D} = \{\ z \in \mathbb{C}\ \big|\ |z| \leq 1\}$.*

Враховуючи попереднє зауваження/вправу, простір максимальних ідеалів $\mathfrak{M}$ можна собі уявляти як об'єднання шарів:

$$\mathfrak{M}_\xi = Z^{-1}(\{\xi\}), \quad \xi \in \overline{D}.$$

Насправді справедливе таке твердження:

Твердження 1. *Шар $\mathfrak{M}_\xi$ складається лише з однієї точки $\{\phi_\xi\}$, якщо $\xi \in D$.*

Доведення. Потрібно показати, що коли $\xi \in D$, то умова $\phi(z) = \xi$ однозначно визначає дію функціонала на усіх функціях $f \in H^\infty(D)$ (ми покажемо, що $\phi = \phi_\xi$). Дійсно, нехай $f \in H^\infty(D)$, тоді функція $\frac{f - f(\xi)}{z - \xi}$ теж належить $H^\infty(D)$ (тому що f аналітична та $\xi \in D$), і має місце рівність

$$f = f(\xi) + (z - \xi)\left(\frac{f - f(\xi)}{z - \xi}\right).$$

Тому (мультиплікативність та лінійність ϕ)

$$\phi(f) = f(\xi) + \phi(z - \xi)\phi\left(\frac{f - f(\xi)}{z - \xi}\right) = f(\xi) = \phi_\xi(f).$$

□

Відображення $\xi \to \phi_\xi$ визначає вкладення D в $\mathfrak{M}$, яке є гомеоморфізмом по визначенню топології простору $\mathfrak{M}$. Таким чином, маємо розклад

$$\mathfrak{M} = D \cup \bigcup_{|\xi|=1} \mathfrak{M}_\xi,$$

і весь простір $\mathfrak{M}$ можна уявляти собі як круг D разом з компактним шаром $\mathfrak{M}_\xi$ над кожною точкою границі $\xi \in \partial D$. Множина $\mathfrak{M} \setminus \overline{D}$ називається **короною**.

Вправа 2. *Показати, що шари $\mathfrak{M}_1$ та $\mathfrak{M}_\xi$, $\xi \in \partial D$ гомеоморфні. (Вказівка: розглянути поворот круга $\tau(z) = \xi z$, порождене цим поворотом відображення алгебри та відповідне спряжене відображення).*

Кожен шар $\mathfrak{M}_\xi$, $\xi \in \partial D$ надзвичайно великий, він не піддається явному опису (зауважимо лише, що він містить гомеоморфний образ простору $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$ — простір максимальних ідеалів алгебри $l^\infty(\mathbb{N})$) (більш детально про простори $\mathfrak{M}_\xi$ з описом деяких "шматків" цих просторів див. [2, 4]).

2. Теорема про корону та лінійне співвідношення

Фунціонали значень в точках ϕ_ξ вкладують одиничний круг D в $\mathfrak{M}$, інші гомоморфізми лежать у шарах $\mathfrak{M}_\xi$, $|\xi| = 1$. Запитання таке: чи є ці гомоморфізми границями ϕ_ξ у топології $\mathfrak{M}$? Іншими словами: чи щільний круг D в $\mathfrak{M}$? Хоча це запитання здається абстрактним, його можна звести до конкретного запитання про обмежені аналітичні функції.

Теорема 1. *Наступні твердження рівносильні:*

1. *відкритий круг D щільний в $\mathfrak{M}$;*
2. *якщо $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty(D)$ та*

$$\max_j |f_j(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in D, \tag{1}$$

то існують функції $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty(D)$, такі, що

$$f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1. \tag{2}$$

Доведення. $1 \to 2$. Нехай D щільний в $\mathfrak{M}$. Тоді по неперервності

$$\max_j |f_j(\phi)| \geq \delta, \quad \phi \in \mathfrak{M},$$

і $f_1, \ldots, f_n$ — це неперервні функції, які не мають спільних нулів в $\mathfrak{M}$, тому $\{f_1, \ldots, f_n\}$ не міститься у жодному власному ідеалі алгебри $H^\infty(D)$. Отже, ідеал J, породжений множиною $\{f, \ldots, f_n\}$, містить 1. Оскільки

$$J = \{f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n : \ g_i \in H^\infty(D)\},$$

тому шукана рівність виконується.

$2 \to 1$. Припустимо, що круг D не щільний в $\mathfrak{M}$. Тоді існує точка $\phi_0 \in \mathfrak{M}$, така, що її окіл V_{ϕ_0} не перетинається з D. Цей окіл має вигляд

$$V_{\phi_0} = \{\phi \in \mathfrak{M} \ \big| \ |f_j(\phi)| < \delta, \ 1 \leq j \leq n\},$$

де $\delta > 0$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in H^\infty(D)$ та $f(\phi_0) = 0$. Функції $f_1, \ldots, f_n$ задовольняють умові (1), тому що $V \cap D = \emptyset$, проте не можуть задовольняти (2), оскільки лежать в ідеалі $\{f \mid f(\phi_0) = 0\}$. Отримано протиріччя. $\square$

Теорема 2. *(Карлесон* [1]*, 1962) Круг D щільний в $\mathfrak{M}$.*

Існує декілька доведень цієї теореми (Карлесон, Т. Волф та ін.). Розгорнуте обговорення теореми про корону та її доведень можна знайти тут [2].

Теорема про корону узагальнювалася на різноманітні класи областей на $\mathbb{C}$. Stout E.L. показав, що теорема про корону вірна для скінченнозвязних областей, Behrens M. знайшов клас нескінченнозвязних областей, для яких справджується теорема про корону, є багато інших робіт, що досліджують теорему про корону на випадок довільного комплексного многовида [3].

Теорема про корону також узагальнювалася на випадок довільної комутативної банахової алгебри. Досліджувалося питання існування так званого невидимого спектру (див. [6]).

3. Операторна задача про корону. Лема Нікольського

Розглянемо простір аналітичних функцій $H^\infty_{E_*\to E}(D)$, визначених на крузі D, значення яких — це лінійні обмежені оператори з гільбертового простору E_* у гільбертів простір E.

$$\|F\|_\infty = \sup_{z\in D} \|F(z)\|_{L(E_*,E)}.$$

Простір $H^\infty_{E_*\to E}(D)$, взагалі кажучи, не утворює алгебру, узагальнення теореми про корону не використовує мову максимальних ідеалів для такого простору, "узагальнюється" рівняння Безу $f_1g_1 + \ldots + f_ng_n = 1$.

Операторна задача про корону ([8]) полягає у знаходженні необхідних та достатніх умов на обмежену операторнозначну функцію $F \in H^\infty_{E_*\to E}(D)$, за яких вона лівозворотня в $H^\infty_{E_*\to E}(D)$, тобто існує функція $G \in H^\infty_{E\to E_*}(\Omega)$ така, що

$$G(z)F(z) \equiv I, \quad z \in D. \tag{3}$$

Найпростіша необхідна умова наступна

$$F^*(z)F(z) \geq \delta^2 I, \quad z \in D, \quad (\delta > 0). \tag{4}$$

Якщо з рівності (4) випливає рівність (3), то кажуть, що має місце Операторна Теорема про Корону. Рівність (3) — це певний аналог співвідношення $f_1g_1 + \ldots + f_ng_n = 1$. Справді, якщо F — це стовпчик $F = (f_1, \ldots, f_n)^T$, тоді Операторна Теорема про Корону — це просто класична теорема про корону Карлесона.

Більш детально про мотивацію дослідження операторної задачі про корону та її зв'язок з різними галузями аналізу див., наприклад, [8, 9] та бібліографію, розміщену там.

Ми розглянемо лему Нікольського, яка дає зручний критерій (див. [9]) розв'язності операторної задачі про корону.

Лема Нікольського 1. *Нехай $F \in H^\infty_{E_*\to E}(D)$ задовольняє умові*

$$F^*(z)F(z) \geq \delta^2 I, \quad z \in D.$$

Тоді F лівозворотня в $H^\infty_{E_*\to E}(D)$ (тобто існує $G \in H^\infty_{E\to E_*}(D)$, таке що $GF \equiv I$) тоді і тільки тоді, коли існує функція $\mathcal{P} \in H^\infty_{E\to E}(D)$, значеннями якої є проектори (необов'язково ортогональні) на простори $F(z)E$, $z \in D$.

Доведення. Необхідність. Нехай F лівозворотня в $H^\infty_{E_*\to E}(D)$ та нехай G є лівим оберненням F. Визначимо $\mathcal{P} \in H^\infty_{E\to E}(D)$ рівністю $P(z) = F(z)G(z)$. Нескладно переконатися, що $P^2 = P$, тому значеннями P є проектори. Оскільки $GF \equiv I$, то

$$G(z)E = E_*, \quad z \in D$$

тому

$$P(z)E = F(z)G(z)E = F(z)E_*, \quad z \in D,$$

тобто $P(z)$ — це справді проектор на $F(z)E$. Достатність, див. [9]. $\square$

Література

[1] L. Carleson, *The corona problem*, Lect. Notes Math. **118**, 1970.

[2] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Москва, Мир, 1984. *(тут є декілька доведень теореми про корону, див. гл. 8, Теорема про корону)*

[3] T.W. Gamelin, *Algebra of bounded analytic functions.* Bulletin of the American Mathematical Society **79**, 6 (1973), 1095–1108. *(гарна оглядова стаття)*

[4] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций.* Москва, Издательство иностранной литературы, 1963.

[5] Дж. Мёрфи, *C^*-алгебры и теория операторов*, Москва, Издательство Факториал, 1997.

[6] Nikolai Nikolski, *In search of the invisible spectrum.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **49**, 6 (1999), 1925–1998. *(певні узагальнення теореми про корону на випадок довільної комутативної банахової алгебри)*

[7] M. Andersson, *The Corona Theorem for Matrices*, Math. Z., **201** (1989), 121–130.

[8] Sergei Treil, *An operator Corona Theorem*, Indiana University Mathematical Journal, **53**, 6 (2004), 1765–1784.

[9] Sergei Treil and Brett D. Wick, *Analytic projections, corona problem and geometry of golomorphic vector bundles.* //arXiv:math/0702756v2 *(як і попередня робота, ця теж стосується Операторної Теореми про Корону)*

e-mail: `kay@imath.kiev.ua`