C^*-алгебри. II. Скінченно вимірні алгебри. Теорема фон-Неймана

1. Скінченно вимірні алгебри

1. Нехай у матричній алгебрі $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ визначена норма наступним чином:
$$a \to \|a\| = \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n, \|\xi\| \le 1} \|a\xi\| = \sqrt{\max_{1 \le j \le n} \mu_j}$$
де $\mu_1, \ldots, \mu_n$ власні значення матриці a^*a. Показати, що це єдина C^*-норма у цій матричній алгебрі. Показати що твердження також вірне для довільної інволютивної підалгебри $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Узагальнити попередній результат на довільну $*$-алгебру, а саме – показати, що на довільній $*$-алгебрі існує не більше однієї норми, що перетворює її у C^*-алгебру.

3. Нехай $\mathcal{A}$ – це підалгебра $B(\mathcal{H})$. Комутантом алгебри $\mathcal{A}$ називатимемо множину $\mathcal{A}' = \{b \in B(\mathcal{H}) \,|\, ba = ab,\ a \in \mathcal{A}\}$. Порахувати комутант повних матричних алгебр $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Порахувати комутанти наступних алгебр: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \oplus 0$, $M_n(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_n(\mathbb{C})$.

5. Нехай $\mathcal{A}$ це скінченновимірний фактор, нехай p, q два відмінні від нульового проектори в $\mathcal{A}$. Показати, що існує елемент $a \in \mathcal{A}$ такий, що $paq \neq 0$.

6. Нехай $\mathcal{A}$ - C^*-алгебра. Говоритимемо, що $\mathcal{D}$ це masa алгебри $\mathcal{A}$ якщо вона є максимальною абелевою підалгеброю $\mathcal{A}$. Довести наступні властивості $\mathcal{D}$:

   - *$\mathcal{D} = \mathcal{D}'$;*
   - *якщо $\mathcal{D}$ унітальна, то $\mathcal{A}$ теж унітальна, та одиниця $\mathcal{D}$ співпадає з одиницею $\mathcal{A}$;*
   - *якщо p проектор в $\mathcal{D}$ який задовольняє $p\mathcal{D}p = \mathbb{C}p$ то $p\mathcal{A}p = \mathbb{C}p$, тобто мінімальний проектор в $\mathcal{D}$ мінімальний також і в $\mathcal{A}$.*