C^*-алгебри. I.
Базові відомості, простори максимальних ідеалів та представлення Гельфанда

1. Базові відомості

1. Показати, що алгебра функцій $\mathcal{A} = \mathcal{C}([-1,1])$ з нормою $\|f\| = \sup_{|t|\leq 1} |f(t)|$ та інволюцією $f^*(t) = \overline{f(-t)}$ є банахова алгебра але не C^*-алгебра.
2. Показати, що конволютивна алгебра $\mathcal{A} = l_1(\mathbb{Z})$ (операція множення – згортка послідовностей) з нормою $\|c\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c(n)|$ та інволюцією $c^*(n) = \overline{c(-n)}$ є банахова алгебра але не C^*-алгебра.
3. Показати, що для довільної локально компактної абелевої групи G її конволютивна алгебра $L_1(G)$ не є C^*-алгеброю.
4. Показати, що у C^*-алгебрі існує не більше однієї одиниці. Навести приклад алгебри без одиниці.
5. Показати що довільну C^*-алгебру $\mathcal{A}$ можна уніталізувати (розширити до C^*-алгебри з одиницею $\widetilde{\mathcal{A}}$), таким чином щоб $\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}$. Нехай $\mathcal{K}(H)$ це алгебра компактних операторів в нескінченновимірному гільбертовому просторі H. Описати $\widetilde{\mathcal{K}}(H)$?

2. Простори максимальних ідеалів.

1. Описати максимальні ідеали у кільцях: $\mathbb{Z}$, $k[X,Y]$, $k[[X]]$ – кільце степеневих рядів (k–алгебраїчно замкнуте поле).
2. Описати максимальні ідеали алгебр: $\mathbb{C}, \mathcal{C}(X)$ - алгебра обмежених комплексних функцій на компакті X.
3. Навести приклад некоммутативної банахової алгебри у якій не має власних ідеалів крім $\{0\}$.
4. Показати, що якщо C^*-алгебра містить ідемпотент e ($e^2 = e$), відмінний від 0 і 1, то простір максимальних ідеалів незв'язний.
5. Показати, що простір максимальних ідеалів конволютивної алгебри $l_1(\mathbb{Z})$ гомеоморфний S^1.