Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 63–66

УДК 517.95:512.816

Групова класифікація багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь

О.Ф. ВАСИЛЕНКО †, ***І.А. ЄГОРЧЕНКО*** ‡

† *Приазовський державний технічний університет, Маріуполь*

‡ *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: iyegorch@imath.kiev.ua

Проведено групову класифікацію в класі багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь вигляду $u_{tt} = \nabla(f(u)\nabla u) + g(u)$.

Group classification in the class of multidimensional nonlinear wave equations of the form $u_{tt} = \nabla(f(u)\nabla u) + g(u)$ is carried out.

1. Вступ. В даній статті проведено групову класифікацію в класі багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь вигляду

$$u_{tt} = \nabla(f(u)\nabla u) + g(u), \quad \text{або} \quad u_{tt} = (f(u)u_a)_a + g(u), \tag{1}$$

для однієї дійсної функції $u = u(t, x)$ від $n + 1$ незалежних змінних $t = x_0$ і $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тут і надалі нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною. Індекси a і b змінюються від 1 до n. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$, $\partial_a = \partial/\partial x_a$. f і g — довільні гладкі функції залежної змінної u, причому $f(u) > 0$. Для класифікації використано техніку досліджень, запропоновану в [1].

Клас рівнянь (1) з використанням методів симетрійного аналізу, вивчався в багатьох роботах (див., наприклад, [2–5]). Але, наскільки нам відомо, задачу повної групової класифікації в цьому класі ніде не розглянуто. Не зважаючи на існування окремих результатів щодо симетрійних властивостей рівнянь вигляду (1), остаточне твердження щодо класифікації не сформульовано навіть для важливих підкласів, коли $f \equiv 1$ або $g \equiv 0$.

2. Результат класифікації. Введемо позначення:

$$\partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_a = \partial/\partial x_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\ a<b, \quad I = u\partial_u,$$
$$J_{0a} = t\partial_a + x_a\partial_t, \quad D = t\partial_t + x_a\partial_a, \quad D' = x_a\partial_a + 2\partial_u,$$
$$K_a = 2x_aD + (t^2 - x_bx_b)\partial_a - (n-1)x_aI,$$
$$K_0 = 2tD - (t^2 - x_bx_b)\partial_t - (n-1)tI.$$

Результат групової класифікації щодо рівнянь вигляду (1) сформульовано у вигляді трьох наступних теорем.

Теорема 1. *Ядро G^{ker} основних груп рівнянь вигляду (1) співпадає з групою $E(1)\otimes E(n)$ (прямим добутком груп Евкліда в просторах змінних t і $\vec{x}$ відповідно), алгебра Лі якої $A^{\text{ker}} = e(1)\oplus e(1) = \langle\partial_t,\ \partial_1\rangle$ при $n=1$ та $A^{\text{ker}} = e(1)\oplus e(n) = \langle\partial_t\rangle\oplus\langle\partial_a,\ J_{ab}\rangle$ при $n>1$.*

Теорема 2. *Алгебра Лі A^{equiv} групи еквівалентності G^{equiv} класу рівнянь (1) породжується операторами ∂_t, ∂_a, J_{ab} (при $n\geqslant 2$), $a<b$, ∂_u, $t\partial_t + x_a\partial_a + 2u\partial_u$, $x_a\partial_a + 2f\partial_f$, $t\partial_t + x_a\partial_a - 2g\partial_g$. Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функції f, g має вигляд*

$$\tilde{f}(u) = \delta_1 f(\delta_3 u + \delta_0), \quad \tilde{g}(u) = \delta_2 g(\delta_3 u + \delta_0), \tag{2}$$

де $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3\in\mathbb{R}$, $\delta_1,\delta_2,\delta_3>0$.

Зауваження. Щоб зняти вимогу додатності для константи δ_2 (або δ_3) необхідно врахувати дискретне перетворення еквівалентності рівнянь (1): $\tilde{t}=t,\ \tilde{x}=x,\ \tilde{u}=-u,\ \tilde{f}=f,\ \tilde{g}=-g$.

Теорема 3. *З точністю до перетворень з G^{equiv} для рівнянь (1) існують лише наступні випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(f,g)$ (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до A^{ker}; ε, $\hat{\varepsilon}$ — ненульові сталі, що перетвореннями еквівалентності можна одночасно звести до ± 1):*

I. $f = \text{const} > 0$.

1. $f=1,\ g=g(u)$: J_{0a};
2. $f=1,\ g=|u|^\gamma$, *де* $\gamma\notin\{0;1\}$ *та або* $\gamma\neq\frac{n+3}{n-1}$, *або* $n=1$: $J_{0a},\ (1-\gamma)D+2I$;
3. $f=1,\ g=|u|^{\frac{n+3}{n-1}}$, *де* $n>1$: $J_{0a},\ 2D-(n-1)I,\ K_a,\ K_0$;
4. $f=1,\ g=\varepsilon e^u$: $J_{0a},\ D-2\partial_u$, *якщо* $n>1$, *або* $\varphi^1\partial_t + \varphi^1\partial_x - 2\dot{\varphi}^1\partial_u,\ \varphi^2\partial_t - \varphi^2\partial_x + 2\dot{\varphi}^2\partial_u$, *якщо* $n=1$, *де* $\varphi^1=\varphi^1(x+t)$, $\varphi^2=\varphi^2(x-t)$ *— довільні гладкі несталі функції своїх аргументів;*

5. $f = 1$, $g = \varepsilon u$: J_{0a}, I, $\chi(t,\vec{x})\partial_u$,
де $\chi = \chi(t,\vec{x})$ *— довільний розв'язок вихідного рівняння;*
6. $f = 1$, $g = 0$: J_{0a}, D, I, $\chi(t,\vec{x})\partial_u$, K_a, K_0,
де $\chi = \chi(t,\vec{x})$ *— довільний розв'язок вихідного рівняння.*

II. $f \neq \mathrm{const}$.

1. $f = f(u)$, $g = 0$: D;
2. $f = \varepsilon e^u$, $g = \hat{\varepsilon} e^{\alpha u}$: $\alpha D - D'$;
3. $f = \varepsilon e^u$, $g = 0$: D, D';
4. $f = \varepsilon |u|^\beta$, $g = \hat{\varepsilon}|u|^\gamma$: $\gamma D - \beta x_a \partial_a - 2u\partial_u$;
5. $f = \varepsilon |u|^\gamma$, $g = 0$, *де* $\gamma \notin \{-4; 0; \frac{-4}{n+2}\}$: D, $\gamma x_a \partial_a + 2u\partial_u$;
6. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \hat{\varepsilon} u^{-3}$: $2t\partial_t + u\partial_u$, $t^2\partial_t + tu\partial_u$;
7. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \hat{\varepsilon} u^{-3} - \frac{1}{4}u$: $2\cos t\,\partial_t - \sin t\,u\partial_u$, $2\sin t\,\partial_t + \cos t\,u\partial_u$;
8. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \hat{\varepsilon} u^{-3} + \frac{1}{4}u$: $e^t(2\partial_t + u\partial_u)$, $e^{-t}(2\partial_t - u\partial_u)$;
9. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = 0$: $2t\partial_t + u\partial_u$, $t^2\partial_t + tu\partial_u$, $2x_a\partial_a - u\partial_u$;
10. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = -\frac{1}{4}u$: $2\cos t\,\partial_t - \sin t\,u\partial_u$, $2\sin t\,\partial_t + \cos t\,u\partial_u$,
$2x_a\partial_a - u\partial_u$;
11. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \frac{1}{4}u$: $e^t(2\partial_t + u\partial_u)$, $e^{-t}(2\partial_t - u\partial_u)$, $2x_a\partial_a - u\partial_u$;

III. $f \neq \mathrm{const}$. *Випадки, коли і довільні елементи f і g, для яких є розширення, і склад самого розширення залежать від розмірності простору змінних $\vec{x}$.*

$n = 1$:

1. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = \hat{\varepsilon} u$: $2x\partial_x - 3u\partial_u$, $x^2\partial_x - 3xu\partial_u$;
2. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = \frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3} + \hat{\varepsilon} u$: $2\cos x\,\partial_x + 3\sin x\,u\partial_u$,
$2\sin x\,\partial_x - 3\cos x\,u\partial_u$;
3. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = -\frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3} + \hat{\varepsilon} u$: $e^x(2\partial_x - 3u\partial_u)$, $e^{-x}(2\partial_x + 3u\partial_u)$;
4. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = 0$: $2x\partial_x - 3u\partial_u$, $x^2\partial_x - 3xu\partial_u$, $2t\partial_t + 3u\partial_u$;
5. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = \frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3}$: $2\cos x\,\partial_x + 3\sin x\,u\partial_u$,
$2\sin x\,\partial_x - 3\cos x\,u\partial_u$, $2t\partial_t + 3u\partial_u$;
6. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = -\frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3}$: $e^x(2\partial_x - 3u\partial_u)$, $e^{-x}(2\partial_x + 3u\partial_u)$,
$2t\partial_t + 3u\partial_u$;

$n = 2:$

1. $f = \varepsilon u^{-1}$, $g = \hat{\varepsilon} u$: $\quad \xi^1\partial_1 + \xi^2\partial_2 - 2\xi^1_1 u\partial_u$;

2. $f = \varepsilon u^{-1}$, $g = 0$: $\quad \xi^1\partial_1 + \xi^2\partial_2 - 2\xi^1_1 u\partial_u$, $t\partial_t + 2u\partial_u$;

тут $(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1(x_1, x_2), \xi^2(x_1, x_2))$ *— довільний розв'язок системи Коші–Рімана* $\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$;

$n = 3:$

1. $f = \varepsilon |u|^{-\frac{4}{n+2}}$, $g = \hat{\varepsilon} u$:
$x_a\partial_a - \frac{n+2}{2} u\partial_u$, $2x_a x_b\partial_b - x_b x_b\partial_a - (n+2)x_a u\partial_u$;

2. $f = \varepsilon |u|^{-\frac{4}{n+2}}$, $g = 0$:
$x_a\partial_a - \frac{n+2}{2} u\partial_u$, $2x_a x_b\partial_b - x_b x_b\partial_a - (n+2)x_a u\partial_u$, $t\partial_t + \frac{n+2}{2} u\partial_u$.

3. Висновки. Отримані результати є цікавими з кількох причин. Проведено повну групову класифікацію в класі рівнянь (1), що дозволяє твердити про відсутність випадків розширення групи симетрії, нееквівалентних випадкам з теореми 3. З отриманого результату можна легко виокремити твердження щодо повної групової класифікації в двох важливих підкласах класу (1) (один — з $f \equiv 1$, інший — з $g \equiv 0$). Крім відомих випадків розширення симетрії (всі випадки з $f = \mathrm{const}$ та деякі випадки з $g = 0$), знайдено цілу низку нових випадків розширення. Серед них є такі, що мають неочевидну і нестандартну симетрію.

Наступним кроком симетрійного аналізу виокремлених рівнянь з широкою симетрією є ліївська редукція та побудова їх точних розв'язків. Ці результати разом з докладним доведенням класифікації будуть темою наступних публікацій.

Автори висловлюють щиру подяку Р.О. Поповичу за постановку задачі та плідні обговорення результатів, що містяться в статті.

[1] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. матем. журн. — 2001. — **53**, Буде опубліковано.

[2] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. — 1881. — **8**, № 1. — S. 112–125.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К.: Наукова думка, 1989. — 336 с.

[4] Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non. Mech. — 1981. — **16**, № 5–6. — P. 439–447.

[5] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — **118**, № 4. — P. 172–176.