Конформна інваріантність системи рівнянь ейконалу

В.І. ФУЩИЧ, М.І. СЄРОВ, Ю.Г. ПОДОШВЄЛЕВ

The conformal symmetry of the system of eikonal equations $u^\alpha_\mu u^{\beta,\mu} = g^{\alpha\beta}$, $u^\alpha_\mu u^{\beta,\mu} = -\delta_{\alpha\beta}$, where $g^{\alpha\beta}$ is the metric tensor with the signature $(+,-)$ and $\delta_{\alpha\beta}$ is the Kronecker symbol, is studied. The symmetry of the above system is used for finding its exact solutions at $n = 1$. The isomorphism of the algebras $AC(2,2)$ and $AO(3,3)$ is used to construct invariants of the conformal algebra. Formulas concerning the multiplication of solutions are presented.

Одним з основних рівнянь геометричної оптики є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = m, \tag{1}$$

де $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}_{1+n}$, $\mu = \overline{0,n}$; m — довільна стала. В формулі (1) і скрізь нижче під індексами, які повторюються, слід розуміти суму. В роботах [1–6] детально вивчені симетрійні властивості цього рівняння, проведена редукція та побудовані класи його точних розв'язків. Зокрема в [5] встановлено, що при $m = 1$ рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,n+1)$, а при $m = -1$ — відносно алгебри $AC(2,n)$. Дія цих алгебр визначена в $n+1$-вимірному просторі Пуанкаре–Мінковського $\mathbb{R}(1,n+1)$ з координатами $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \equiv u)$.

Поставимо задачу узагальнити рівняння (1) на випадок системи рівнянь для функцій u^1 і u^2, яка була б інваріантною відносно алгебри $AC(1+1, n+1)$, або $AC(1+2,n)$ в просторі $\mathbb{R}(1,n+2)$ з координатами $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \equiv u^1, x_{n+2} \equiv u^2)$. Розв'язком поставленої задачі є таке твердження.

Теорема. *1. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь*

$$u^\alpha_\mu u^{\beta,\mu} = g^{\alpha\beta}, \tag{2}$$

є конформна алгебра $AC(1+1, n+1)$, де $g^{\alpha\beta}$ — метричний тензор з сигнатурою $(+,-)$.

2. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$u^\alpha_\mu u^{\beta,\mu} = -\delta_{\alpha\beta},$$

є конформна алгебра $AC(1+2,n)$, де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\alpha, \beta = 1, 2$.

Теорема доводиться стандартним методом С. Лі [8].

У випадку $n = 1$ система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} &(u^1_0)^2 - (u^1_1)^2 = 1, \\ &(u^2_0)^2 - (u^2_2)^2 = -1, \\ &u^1_0 u^2_0 - u^1_1 u^2_1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Доповіді НАН України, 1999, № 1, С. 43–47.

Використаємо симетрію системи рівнянь (3) для знаходження її точних розв'язків, які будемо шукати у вигляді

$$v = \varphi^1(\omega), \quad w = \varphi^2(w) \tag{4}$$

(див., наприклад, [5]), де $\varphi^1(\omega)$ і $\varphi^2(\omega)$ — невідомі функції, які потрібно визначити, а $\omega = \omega(x, u^1, u^2)$, $v = (x, u^1, u^2)$ та $w = w(x, u^1, u^2)$ — інваріанти конформної алгебри. Для знаходження інваріантів конформної алгебри необхідно проінтегрувати нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь. Основна складність полягає в тому, що не існує загальних методів розв'язування таких систем. Але дану систему можна звести до лінійної, використовуючи ізоморфізм між конформною алгеброю $AC(m, k)$ та алгеброю Лоренца $AO(m + 1, k + 1)$. У випадку $m = k = 2$ даний ізоморфізм здійснюється за допомогою заміни (більш детально про це див., наприклад, [7]):

$$\begin{gathered} x_0 = \frac{z_2}{z_6 - z_1}, \quad x_1 = \frac{z_5}{z_6 - z_1}, \quad x_2 = \frac{z_4}{z_6 - z_1}, \quad x_3 = \frac{z_3}{z_6 - z_1}, \\ x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = \frac{z_6 + z_1}{z_6 - z_1}, \quad z_1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} z_6, \\ z_2 = \frac{2x_0}{x^2 + 1} z_6, \quad z_3 = \frac{2x_3}{x^2 + 1} z_6, \quad z_4 = \frac{2x_2}{x^2 + 1} z_6, \quad z_5 = \frac{2x_1}{x^2 + 1} z_6, \end{gathered} \tag{5}$$

і діє на конусі $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 = 0$ точно. Зв'язок між операторами конформної алгебри $AC(2, 2)$ та алгебри Лоренца $AO(3, 3) = \{J'_{ab}\}$, $a, b = \overline{1, 6}$, задається формулами

$$\begin{aligned} & P_\alpha = f(J'_{1\alpha+2} - J'_{\alpha+2n+3}), \quad D = -f(J'_{1n+3}), \quad J_{\alpha\beta} = f(J'_{\alpha+2\beta+2}), \\ & K_\alpha = f(J'_{1\alpha+2} + J'_{\alpha+2n+3}). \end{aligned}$$

Відповідна система Лагранжа–Ейлера є лінійна, однорідна і в матричній формі має вигляд

$$\dot{Z} = AZ,$$

де A — числова матриця розмірності 6×6. Вигляд розв'язків системи (6) визначається виглядом коренів характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{6}$$

(E — одинична матриця). Розкриваючи визначник шостого порядку і виконуючи елементарні перетворення, (7) матиме вигляд

$$\lambda^6 + M\lambda^4 + T\lambda^2 + P = 0,$$

де M, T, P — числа, які визначаються через елементи матриці A. Залежно від значень M, T, P та рангу матриці $(A - \lambda E)$ знайдено 15 різних випадків розв'язку системи (6). Для кожного з цих випадків при використанні замін (5) знайдено шукані інваріанти w, v і w. Не наводячи громіздких обчислень, кінцевий результат зобразимо за допомогою табл. 1.

В табл. 1 введені позначення: $ax = a_A x^A$, $x^2 = x_A x^A$, a, b, c, d, a', b', c', d' — довільні сталі вектори, які задовольняють умови $a^2 = -b^2 = -c^2 = d^2 = 1$, $ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0$, $A = \overline{0, 3}$.

Таблиця 1. Інваріантні змінні групи $C(2,2)$.

№	ω	v	w
1	$a'x$	$c'x$	$d'x$
2	$b'x$	$c'x$	x^2
3	$\frac{ax}{dx}$	$\frac{bx}{dx}$	$\frac{x^2+1}{dx}$
4	$\frac{ax}{cx}$	$\frac{x^2(dx+bx)+dx-bx}{(cx)^2}$	$\frac{(x^2+1)^2+4(bx)^2}{(cx)^2}$
5	$\frac{ax}{dx}$	$\ln\frac{x^2-2cx-1}{dx}-\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2bx}$	$\frac{(x^2-1)^2-4(cx)^2}{(dx)^2}$
6	$\frac{x^2+1}{dx}$	$\frac{x^2-2cx-1}{ax-bx}$	$\frac{(ax)^2-(bx)^2}{(dx)^2}$
7	$\frac{x^2+1}{dx}$	$\frac{(x^2-2cx-1)dx}{(ax-bx)^2}$	$\frac{(ax)^2-(bx)^2}{(dx)^2}$
8	$\frac{x^2-1}{cx}$	$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2bx}-2\operatorname{arctg}\frac{ax}{dx}$	$\frac{(ax)^2+(dx)^2}{(cx)^2}$
9	$\frac{x^2+1}{bx-1}$	$\frac{2cx}{bx-1}+(\omega+2)\operatorname{arctg}\frac{ax}{dx}$	$\frac{(ax)^2+(dx)^2}{(bx-1)^2}$
10	$\frac{x^2+2bx-1}{ax}$	$\frac{2cx}{ax}+\omega\operatorname{arcth}\frac{x^2+1}{2dx}$	$\frac{(x^2+1)^2-4(dx)^2}{(ax)^2}$
11	$\frac{x^2-2dx+1}{ax-bx}$	$2\operatorname{arctg}\frac{bx}{ax}-\operatorname{arcth}\frac{2cx}{x^2-1}$	$\frac{(x^2-1)^2-4(cx)^2}{(ax)^2-(bx)^2}$
12	$\frac{(x^2+1)dx-2axbx}{(ax)^2+(dx)^2}$	$\ln\frac{x^2-2cx-1}{x^2+2cx-1}-\operatorname{arctg}\frac{ax}{dx}$	$\frac{(x^2-1)^2-4(cx)^2}{(ax)^2+(dx)^2}$
13	$\frac{x^2-2dx+1}{ax-bx}$	$\operatorname{arcth}\frac{bx}{ax}-\operatorname{arcth}\frac{2cx}{x^2-1}$	$\frac{(x^2-1)^2-4(cx)^2}{(ax)^2-(bx)^2}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2bx}+\operatorname{arcth}\frac{2cx}{x^2-1}$	$\operatorname{arctg}\frac{ax}{dx}-2\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2bx}$	$\frac{(x^2-1)^2-4(cx)^2}{(ax)^2-(dx)^2}$
15	$\frac{(x^2-2cx-1)(x^2-2dx+1)}{(ax-bx)^2}$	$\operatorname{arcth}\frac{ax}{bx}-2\operatorname{arcth}\frac{2dx}{x^2+1}$	$\frac{(x^2+1)^2-4(dx)^2}{(ax)^2-(bx)^2}$

Підставивши анзац (4) в систему рівнянь (3), одержимо

$$\begin{aligned}
&v_a v^A - 2\omega_A v^A \dot\varphi^1 + \omega_A\omega^A(\dot\varphi^1)^2 = 0,\\
&w_A w^A - 2\omega_A w^A \dot\varphi^1 + \omega_A\omega^A(\dot\varphi^2)^2 = 0,\\
&v_A w^A - \omega_A w^A \dot\varphi^1 - \omega_A v^A\dot\varphi^2 + \omega_A\omega^A\dot\varphi^1\dot\varphi^2 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Розглянувши систему (8) разом з табл. 1, де вказані відповідні значення інваріантних змінних ω, v та w, одержимо редуковані системи рівнянь для визначення функцій $\varphi^1(\omega)$ і $\varphi^2(\omega)$. Наведемо декілька таких систем:

$$\begin{aligned}
1)\quad &(c')^2 - 2a'c'\dot\varphi^1 + (a')^2(\dot\varphi^1)^2 = 0,\\
&(d')^2 - 2a'd'\dot\varphi^2 + (a')^2(\dot\varphi^2)^2 = 0,\\
&c'd' - a'd'\dot\varphi^1 - a'c'\dot\varphi^2 + (a')^2\dot\varphi^1\dot\varphi^2 = 0;\\
3)\quad &-1 + (\varphi^1)^2 - 2\omega\varphi^1\dot\varphi^1 + (\omega^2+1)(\dot\varphi^1)^2 = 0,\\
&-4 + (\varphi^2)^2 - 2\omega\varphi^2\dot\varphi^2 + (\omega^2+1)(\dot\varphi^2)^2 = 0,\\
&\varphi^1\varphi^2 - \omega\varphi^2\dot\varphi^1 - \omega\varphi^1\dot\varphi^2 + (\omega^2+1)\dot\varphi^1\dot\varphi^2 = 0;\\
9)\quad &(\varphi^1)^2 + 4\left(1 - \frac{(\omega+2)^2}{\varphi^2}\right) - 2(\omega+2)\varphi^1\dot\varphi^1 + (\omega+2)^2(\dot\varphi^1)^2 = 0,\\
&\varphi^2(1-\varphi^2) + (\omega+2)\varphi^2\dot\varphi^2 - \frac{(\omega+2)^2}{4}(\dot\varphi^2)^2 = 0,\\
&2\varphi^1\varphi^2 - 2(\omega+2)\varphi^2\dot\varphi^1 - (\omega+2)\varphi^1\dot\varphi^2 + (\omega+2)^2\dot\varphi^1\dot\varphi^2 = 0;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
11)\quad & \left(1+\frac{4}{\varphi^2}\right)-\omega\dot\varphi^1=0,\\
& 4+\varphi^2-\omega\dot\varphi^2=0,\\
& 2\varphi^2+\dot\varphi^1+\dot\varphi^2=0.
\end{aligned}
$$

Номер системи відповідає номеру інваріантів в табл. 1.

Якщо розв'язати редуковані рівняння і використати відповідні їм інваріанти і анзац (4), то одержимо розв'язки системи (3). Наведемо деякі з них:

$$
\begin{aligned}
& u^1=a_\mu x^\mu,\quad u^2=b_\mu x^\mu;\\
& u^1=a_\mu x^\mu,\quad u^2=\sqrt{(a_\mu x^\mu)^2-x_\mu x^\mu};\\
& u^1=\sqrt{x_\mu x^\mu+(b_\mu x^\mu)^2},\quad u^2=b_\mu x^\mu;\\
& u^1-ax=m_1(u^2-bx),\quad x_Ax^A=m_2(u^2-bx),
\end{aligned}
$$

де a_μ, b_μ — сталі вектори; $a_\mu a^\mu=-b_\mu b^\mu=1$, $a_\mu b^\mu=0$, $\mu=0,1$; m_1, m_2 — довільні сталі.

Одержані інваріанти алгебри $AC(2,2)$ та розв'язки системи (3) можна розмножити за допомогою перетворень інваріантності. Ці перетворення мають вигляд

$$
x_A\to\frac{c_{AB}(x_B-\theta_Bx_Ax^A)}{1-2\theta_Ax^A+\theta_A\theta^Ax_Ax^A},
$$

де $x_2\equiv u^1$, $x_3\equiv u^2$, c_{AB}, θ_A — довільні сталі параметри.

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3658.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., Shtelen W.M., Some exact solutions of many-dimensional nonlinear d'Alembert, Liouville, eikonal, and Dirac equations, in Group-Theoretical Methods in Physics, London, Harwood Acad. Publ., 1984, 489–496.
4. Штелень В.М., Касательные преобразования релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики, 1983, 62–65.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1993, 436 p.
6. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И., Редукция и точные решения уравнения эйконала, *Укр. мат. журн.*, 1991, **43**, № 4, 461–474.
7. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук, думка, 1991, 300 с.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.