Ліївська та умовна симетрія системи рівнянь Гамільтона–Якобі

В.І. ФУЩИЧ, М.І. СЄРОВ, М.М. СЄРОВА, А.В. ГЛЄБА

Lie and conditional symmetries of the Hamilton–Jacobi system of equations are investigated.

В роботі [1] встановлено, що максимальною в класі операторів С. Лі алгеброю інваріантності рівняння Гамільтона–Якобі

$$U_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}U)^2 = 0 \tag{1}$$

є алгебра, базисні елементи якої мають вигляд

$$\begin{gathered}
\partial_0, \quad \partial_a, \quad \partial_u, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \\
G_a^I = x_0\partial_a + mx_a\partial_u, \quad G_a^{II} = u\partial_a + mx_a\partial_0, \\
D^I = x_0\partial_0 + \frac{1}{2}x_a\partial_a, \quad D^{II} = u\partial_u + \frac{1}{2}x_a\partial_a, \\
\Pi^I = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + \frac{1}{2}m\vec{x}^2\partial_0, \quad \Pi^{II} = u^2\partial_u + ux_a\partial_a + \frac{1}{2}m\vec{x}^2\partial_0, \\
K_a = 2x_aD + s^2\partial_a.
\end{gathered} \tag{2}$$

В формулах (1), (2) введені такі позначення:

$$u = u(x) \in \mathbb{R}_1, \quad x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}_{n+1}, \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad u_0 = \partial_0 u,$$
$$D = D^I + D^{II}, \quad s^2 = \frac{2}{m}x_0u - \vec{x}^2, \quad m = \text{const},$$

за індексами a, b які повторюються, слід розуміти суму від 1 до n.

В роботі [2] досліджено, що в класі скалярних диференціальних рівнянь 1-го порядку рівняння (1) є єдиним, інваріантним відносно алгебри (2).

В роботі [3] показано, що алгебра (2) локально ізоморфна конформній алгебрі $AC(1, n+1)$, де роль x_{n+1} відіграє функція u.

Узагальнимо рівняння (1) на випадок двох функцій u^1, u^2 такою системою рівнянь:

$$u_0^1 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}u^1)^2 = 0, \tag{3}$$

$$u_0^2 + \frac{1}{m}\vec{\nabla}u^1\vec{\nabla}u^2 = 0. \tag{4}$$

Система рівнянь (3), (4) в більш розширеному варіанті досліджена в роботі [4].

Доповіді НАН України, 1998, № 12, С. 49–52.

Дослідимо ліївську та умовну симетрію як рівняння (4), так і системи рівнянь (3), (4).

Теорема 1. *Максимальною ліївською алгеброю інваріантності рівняння (4) є нескінченновимірна алгебра з інфінітезимальним оператором*

$$X = a\partial_0 + \left[\frac{1}{2}(\dot{a}+b)x_a + c_{ab}x_b + d_a\right]\partial_a + \\ + \left[bu^1 + m\left(\frac{\ddot{a}+\dot{b}}{4}\vec{x}^2 + \vec{\dot{d}}\vec{x}\right) + h\right]\partial_{u^1} + K\partial_{u^2},$$

де $c_{ab} = -c_{ba}$ *— довільні сталі;* $a(x_0)$, $b(x_0)$, $d_a(x_0)$, $K(u^2)$ *— довільні гладкі функції.*

Теорема 2. *Базисні елементи максимальної ліївської алгебри інваріантності системи рівнянь (3), (4) задаються формулами (2), в яких* $u \equiv u^1$, *та нескінченним оператором*

$$B = K(u^2)\partial_{u^2},$$

де $K(u^2)$ *— довільна гладка функція.*

Теореми 1, 2 доводяться стандартним методом С. Лі [5].

Теорема 3. *Система рівнянь (3), (4) при додатковій умові*

$$(\vec{\nabla}u^2)^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

інваріантна відносно алгебри

$$\begin{gathered}\partial_0, \quad \partial_a, \quad \partial_{u^1}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad J_{n+1a} = u^2\partial_a + x_a\partial_{u^2}, \\ G_a^I = x_0\partial_a + mx_a\partial_{u^1}, \quad G_{n+1}^I = x_0\partial_{u^2} - mu^2\partial_{u^1}, \\ G_a^{II} = u^1\partial_a + mx_q\partial_0, \quad G_{n+1}^{II} = u^1\partial_{u^2} - mu^2\partial_0, \\ D^I = x_0\partial_0 + \frac{1}{2}(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}), \quad D^{II} = u^1\partial_{u^1} + \frac{1}{2}(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}), \\ \Pi^I = x_0^2\partial_0 + x_0(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}) + \frac{1}{2}m(\vec{x}^2 - (u^2)^2)\partial_{u^1}, \\ \Pi^{II} = (u^1)^2\partial_{u^1} + u^1(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}) + \frac{1}{2}m(\vec{x}^2 - (u^2)^2)\partial_0, \\ K_a = 2x_aD + s^2\partial_a, \quad K_{n+1} = 2u^2D - s^2\partial_{u^2},\end{gathered} \tag{6}$$

де $D = D^I + D^{II}$, $s^2 = \frac{2}{m}x_0u^1 - (\vec{x}^2 - (u^2)^2)$.

Доведення. Критерій умовної інваріантності системи (3), (4) згідно з [3] має вигляд

$$\tilde{Q}S_1 = \lambda_1S_1 + \lambda_2S_2 + \lambda_3S_3, \quad \tilde{Q}S_2 = \lambda_4S_1 + \lambda_5S_2 + \lambda_6S_3, \\ \tilde{Q}S_3 = \lambda_7S_1 + \lambda_8S_2 + \lambda_gS_3.$$

Розглянемо, наприклад, оператор $\tilde{Q} = \alpha_a(u^2\partial_a + x_a\partial_{u^2})$, де α_a — довільні константи. Якщо знайти друге продовження цього оператора і подіяти ним на кожне з рівнянь (3), (4), (5), то можна одержати:

$$\tilde{Q}S_1 = -\alpha_au_a^1S_2, \quad \tilde{Q}S_2 = -\alpha_au_a^2S_2 + \frac{1}{m}\alpha_au_a^1S_3, \quad \tilde{Q}S_3 = 2\alpha_au_a^2S_3,$$

де S_1, S_2, S_3 — ліві частини рівнянь (3), (4), (5) відповідно. Аналогічно встановлюється умовна інваріантність системи (3), (4) відносно інших операторів алгебри (6). Теорема доведена.

Теорема 4. *Алгебра (6) локально ізоморфна конформній алгебрі* $AC(1+1, n+1)$.

Доведення. Перейдемо від змінних $(x_0, \vec{x}, u^1, u^2)$ до змінних $(y_0, \vec{y}, y_{n+1}, t)$ за формулами

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + \frac{u^1}{m}\right), \quad \vec{y} = \vec{x}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - \frac{u^1}{m}\right), \quad t = u^2. \tag{7}$$

У просторі $(y_0, t, \vec{y}, y_{n+1})$ з метричним тензором g^{AB} сигнатури $(+, +, \underbrace{-, \ldots, -}_{n}, -)$ базисні оператори конформної алгебри $AC(2, n+1)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}
\tilde{P}_0 = \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad \tilde{P}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{P}_a = \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad \tilde{P}_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y_{n+1}}, \\
\tilde{J}_{0t} = y_0\tilde{P}_t - t\tilde{P}_0, \quad \tilde{J}_{0a} = y_0\tilde{P}_a + y_a\tilde{P}_0, \quad \tilde{J}_{0,n+1} = y_0\tilde{P}_{n+1} + y_{n+1}\tilde{P}_0, \\
\tilde{J}_{ta} = t\tilde{P}_a + y_a\tilde{P}_t, \quad \tilde{J}_{t,n+1} = t\tilde{P}_{n+1} + y_{n+1}\tilde{P}_t, \quad \tilde{J}_{ab} = y_a\tilde{P}_b - y_b\tilde{P}_a, \\
\tilde{J}_{a,n+1} = y_a\tilde{P}_{n+1} - y_{n+1}\tilde{P}_a, \quad \tilde{D} = y_0\tilde{P}_0 + t\tilde{P}_t + y_a\tilde{P}_a + y_{n+1}\tilde{P}_{n+1}, \\
\tilde{K}_0 = 2y_0\tilde{D} - s^2\tilde{P}_0, \quad \tilde{K}_t = 2t\tilde{D} - s^2\tilde{P}_t, \\
\tilde{K}_a = 2y_a\tilde{D} + s^2\tilde{P}_a, \quad \tilde{K}_{n+1} = 2y_{n+1}\tilde{D} + s^2\tilde{P}_{n+1},
\end{gathered} \tag{8}$$

де $s^2 = y_0^2 + t^2 - \vec{y}^2 - y_{n+1}^2$.

Формули (7) встановлюють взаємнооднозначний зв'язок між операторами алгебри (6) та (8). А саме:

$$\begin{gathered}
\partial_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{P}_0 + \tilde{P}_{n+1}), \quad \partial_{u^1} = \frac{1}{m\sqrt{2}}(\tilde{P}_0 - \tilde{P}_{n+1}), \quad \partial_a = \tilde{P}_a, \quad \partial_{u^2} = \tilde{P}_t, \\
J_{n+1a} = \tilde{J}_{ta}, \quad J_{ab} = \tilde{J}_{ab}, \quad D^I = \frac{1}{2}(\tilde{D} + \tilde{J}_{0,n+1}), \quad D^{II} = \frac{1}{2}(\tilde{D} - \tilde{J}_{0,n+1}), \\
G^I_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{J}_{0t} + \tilde{J}_{t,n+1}), \quad G^{II}_{n+1} = \frac{m}{\sqrt{2}}(\tilde{J}_{0t} - \tilde{J}_{t,n+1}), \\
G^I_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{J}_{0a} - \tilde{J}_{a,n+1}), \quad G^{II}_a = \frac{m}{\sqrt{2}}(\tilde{J}_{0a} + \tilde{J}_{a,n+1}), \\
\Pi^I = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\tilde{K}_0 + \tilde{K}_{n+1}), \quad \Pi^{II} = \frac{m}{2\sqrt{2}}(\tilde{K}_0 - \tilde{K}_{n+1}), \quad K_a = \tilde{K}_a, \quad K_t = \tilde{K}_{n+1}.
\end{gathered}$$

Цей факт і доводить твердження теореми.

Дослідимо тепер ліївську симетрію систем (3), (5); (4), (5). Як і теореми 1, 2, за допомогою методу Лі доводяться такі твердження.

Теорема 5. *Базисні елементи максимальної ліївської алгебри інваріантності системи рівнянь (3)–(5) задаються формулами вигляду*

$$\begin{gathered}
\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad G_a = x_0\partial_a + mx_a\partial_{u_1}, \\
D^I = x_0\partial_0 + \frac{1}{2}(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}), \quad D^{II} = u^1\partial_{u^1} + \frac{1}{2}(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}), \\
\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0(x_a\partial_a + u^2\partial_{u^2}) + \frac{m}{2}\vec{x}^2\partial_{u^2}
\end{gathered}$$

та нескінченним оператором $R = K(x_0)\partial_{u^2}$, *де* $K(x_0)$ *— довільна гладка функція.*

Теорема 6. *Максимальною ліївською алгеброю інваріантності системи рівнянь (4), (5) є нескінченно вимірна алгебра з інфінітезимальним оператором*

$$X = \alpha\partial_0 + \left[(\dot\alpha + \beta)x_a + c_{ab}x_b + c_{a,n+1}u^2 + d_a\right]\partial_a + \\ + \left[\beta u^1 + m\left(\frac{1}{4}(\ddot\alpha\ddot\beta)(\vec{x}^2 - (u^2)^2) + \dot d_a x_a - \dot d_{n+1}u^2\right) + \gamma\right]\partial_{u^1} + \\ + \left[\frac{1}{2}(\dot\alpha + \beta)u^2 + c_{an+1}x_a + d_{n+1}\right]\partial_{u^2},$$

де $\alpha(x_0)$, $\beta(x_0)$, $d_a(x_0)$, $d_{n+1}(x_0)$, $\gamma(x_0)$ *— довільні гладкі функції,* $c_{a,n+1} = -c_{n+1,a}$ *сталі.*

З наведених результатів випливає, що природним узагальненням рівняння Гамільтона–Якобі є система (3), (4), (5) для двох функцій u^1 і u^2. Внаслідок широких симетрійних властивостей вона є претендентом для опису реальних фізичних процесів.

1. Boyer C.P., Penafiel M.N., Conformal symmetry of the Hamilton–Jacobi equation and quantization, *Nuovo Cim. B*, 1976, **31**, № 2, 195–210.
2. Серова М.М., О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН Украины, 1985, 119–123.
3. Fushchych W., Shtelen W., Serov N., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Dordrech, Kluwer Acadamic Publishers, 1993, 436 p.
4. Fushchych W., Chemiha R., Galilei-invariant nonlinear systems of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1995, **28**, 5569–5579.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.