Конформна симетрія нелінійного циліндрично симетричного хвильового рівняння

В.І. ФУЩИЧ, М.І. СЄРОВ, Ю.Г. ПОДОШВЄЛЕВ

Conformal symmetry of the nonlinear cylindrically symmetric wave equation $\Box u - \frac{N}{x_n}u_n = \lambda u^k$, $N = 1 - n + \frac{4}{k-1}$, is studied. The symmetry of this equation is used to construct its exact solutions for $n = 2$. An isomorphism of the algebras $AC(1,1)$ and $AO(2,2)$ is used to obtain conformal algebra invariants. Formulas multiplicating the solutions found are presented.

Відомо, що максимальною в розумінні С. Лі алгеброю інваріантності хвильового рівняння

$$\Box u = F(x,u), \tag{1}$$

при $F(x,u) = 0$ є конформна алгебра $AC(1,n)$, базисні елементи якої мають вигляд

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu,$$
$$D = x_\mu\partial_\mu + \frac{1-n}{2}u\partial_u, \quad K_\mu = 2x^\mu D - x^2\partial_\mu,$$

де $\mu,\nu = \overline{0,n}$; при $F(x,u) \neq 0$ рівняння (1) зберігає конформну симетрію $AC(1,n)$ лише у випадку

$$F(x,u) = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \quad n \neq 1$$

де λ — довільна стала. При опису реальних фізичних процесів застосовується рівняння (1) при $n = 3$, тобто

$$u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33} = F(u). \tag{2}$$

Нехай процес, що описується рівнянням (2), циліндрично симетричний. Це означає, що

$$u(x_0,x_1,x_2,x_3) = u(x_0,x_1,\rho), \tag{3}$$

де $\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Підставляючи (3) в (2), одержимо

$$u_{00} - u_{11} - u_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho}u_\rho = F(u).$$

Перепишемо сказане вище на випадок довільної кількості незалежних змінних

$$u = u(y_0, y_1, \ldots, y_{n+N}).$$

Доповіді НАН України, 1998, № 4, С. 64–68.

Вважаючи, що процес, який описується рівнянням

$$u_{00} - u_{11} - \cdots - u_{n+N,n+N} = F(u),$$

має узагальнену сферичну симетрію, тобто

$$u = u(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, \rho),$$

де $\rho = \sqrt{y_n^2 + \ldots + y_{n+N}^2}$, аналогічно отримаємо рівняння

$$u_{00} - u_{11} - \cdots - u_{n-1,n-1} - u_{\rho\rho} - \frac{N}{\rho} u_\rho = F(u). \tag{4}$$

Якщо покласти $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$, …, $y_{n-1} = x_{n-1}$, $y_\rho = x_n$ то рівняння (4) матиме вигляд

$$u_{00} - u_{11} - \cdots - u_{nn} - \frac{N}{x_n} u_n = F(u), \tag{5}$$

де $u = u(x), x = (x_0, x) \in \mathbb{R}_{1+n}$. Перепишемо рівняння (5) наступним чином:

$$\Box u - \frac{N}{x_n} u_n = F(u). \tag{6}$$

Дослідимо, чи володіє воно конформною симетрією.

Теорема. *Рівняння (6) при $N \neq 0$ інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1, n-1)$:*

$$\left\langle \partial_\alpha, J_{\alpha\beta}, D = x_\alpha \partial_\alpha + x_n \partial_n + \frac{1-n-N}{2} u \partial_u,\ K_\alpha = 2x^\alpha D - (x_\beta x^\beta - x_n^2)\partial_\alpha \right\rangle,$$

$\alpha, \beta = \overline{1, n-1}$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$F(u) = \lambda u^k, \quad N = 1 - n + \frac{4}{k-1}, \tag{7}$$

де λ і $k \neq 1$ — довільні константи.

Теорема доводиться методом С. Лі [1].

У випадку $n = 2$ і за умови (7) рівняння (6) має вигляд

$$u_{00} - u_{11} - u_{22} - \frac{N}{x_2} u_2 = \lambda_{u_k}, \quad N = \frac{5-k}{k-1}, \quad N \neq 0, \quad k \neq 1. \tag{8}$$

Застосуємо симетрію рівняння (8) для знаходження його розв'язків, котрі будемо шукати у вигляді

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega), \tag{9}$$

(див., напр., [2]). У формулі (9) $\varphi(\omega)$ — невідома функція, яку потрібно визначити, а інваріантні змінні $\omega = \omega(X)$ та функція $f(x)$ визначаються як розв'язки системи Лагранжа–Ейлера

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2} = \frac{du}{\eta}.$$

Розв'язуючи рівняння $\frac{dx_2}{\xi^2} = \frac{du}{\eta}$, одержуємо вигляд анзаца (9) та функції $f(x)$, а нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2}$$

за допомогою ізоморфізму між алгеброю $AC(1,1)$ і алгеброю Лоренца $AO(2,2)$ [3] зведемо до лінійної. Даний ізоморфізм здійснюється перетворенням змінних

$$\begin{aligned}
&x_0 = \frac{z_2}{z_4 - z_1}, \quad x_1 = \frac{z_3}{z_4 - z_1}, \quad x_2 = \frac{z_5}{z_4 - z_1}, \\
&x^2 - x_2^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = \frac{z_4 + z_1}{z_4 - z_1}, \quad z_1 = \frac{x^2 - x_2^2 - 1}{2x_2} z_5, \\
&z_2 = \frac{x_0}{x_2} z_5, \quad z_3 = \frac{x_1}{x_2} z_5, \quad z_4 = \frac{x^2 - x_2^2 + 1}{2x_2} z_5
\end{aligned} \tag{10}$$

і діє на конусі $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 = 0$ точно. Зв'язок між операторами конформної алгебри $AC(1,1)$ та алгебри Лоренца $AO(2,2) = \{J'_{ab}\}$, $a, b = \overline{1,4}$ задається формулами $\partial_0 = J'_{12} - J'_{24}$, $\partial_1 = J'_{13} - J'_{34}$, $J'_{01} = J'_{23}$, $D = -J'_{14}$, $K_0 = J'_{12} + J'_{24}$, $K_1 = J'_{13} + J'_{34}$. Відповідна система Лагранжа–Ейлера лінійна, однорідна і має вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{-c_{21}z_2 + c_{31}z_3 + c_{41}z_4} = \frac{dz_2}{c_{21}z_1 + c_{32}z_3 + c_{42}z_4} = \frac{dz_3}{c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{43}z_4} = \\
&\quad = \frac{dz_4}{c_{41}z_1 + c_{42}z_2 - c_{43}z_3} = \frac{dz_5}{0} = dt.
\end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) розпадається на дві підсистеми: перша з них

$$\dot{z}_5 = 0, \tag{12}$$

а друга в матричній формі має вигляд

$$\dot{Z} = AZ, \tag{13}$$

де

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ c_{21} & 0 & c_{32} & c_{42} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{43} \\ c_{41} & c_{42} & -c_{43} & 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком (12) є $z_5 = \mathrm{const}$. Вигляд розв'язків системи (13) визначається виглядом коренів характеристичного рівняння

$$\det[A - \lambda E] = 0, \tag{14}$$

(E — одинична матриця). У даному випадку (14) має вигляд

$$\lambda^2(\lambda^2 + M) + G = 0,$$

де $M = c_{21}^2 + c_{43}^2 - c_{31}^2 - c_{32}^2 - c_{41}^2$, $G = (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41} - c_{21}c_{43})^2$. В залежності від значень M, G та рангу матриці $(A - \lambda E)$ можливі 9 різних випадків розв'язку системи (13). Для кожного з цих випадків, скориставшись перетвореннями змінних (10), знайдемо шукані інваріанти ω та вигляд функції $f(x)$. Не приводячи громіздких обрахунків, кінцевий результат наведено за допомогою табл. 1.

В табл. 1 введені такі позначення: $ax = a_0x_0 - a_1x_1$, $bx = b_0x_0 - b_1x_1$, $x^2 = x_0^2 - x_1^2$, a, b, α, β — довільні сталі вектори, що задовольняють умови $a^2 = -b^2$, $ab = 0$, $\alpha = a + b$, $\beta = a - b$, $m = \mathrm{const}$.

Таблиця 1. Інваріантні змінні групи $C(1,1)$.

№	$f(x)$	ω_1	ω_2
1	1	x_2	αx
2	1	x_2	x^2
3	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\frac{bx}{x_2}$	$\frac{x^2-x_2^2+1}{x_2}$
4	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\frac{\alpha x}{x_2}$	$\frac{x^2-x_2^2+1}{x_2}$
5	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\frac{\alpha x}{x_2^2}$	$\beta x + m\ln x_2$
6	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\frac{\alpha x}{x_2^3}$	$x_2\beta x$
7	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\frac{\beta x(x^2-x_2^2)+\alpha x}{x_2^2}$	$\frac{(x^2-x_2^2+1)^2+4(bx)^2}{x_2^2}$
8	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\operatorname{arctg}\frac{x^2-x_2^2-1}{2ax} - 2\operatorname{arctg}\frac{x^2-x_2^2+1}{2bx}$	$\frac{(x^2-x_2^2+1)^2+4(bx)^2}{x_2^2}$
9	$x_2^{\frac{2}{1-k}}$	$\frac{\beta x(x^2-x_2^2)-\alpha x}{x_2^2}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2-x_2^2)^2+(\alpha x)^2}{x_2^2} - \operatorname{arctg}\frac{x^2-x_2^2}{\alpha x}$

Розглянувши формулу (9) сумісно з табл. 1, де вказано відповідні значення інваріантних змінних ω_1, ω_2 та функції $f(x)$, отримаємо дев'ять нееквівалентних анзаців. Підставивши їх в рівняння (8), отримаємо наступні редуковані рівняння для визначення функції $\varphi(\omega)$:

$$\varphi_{11} + \frac{5-k}{(k-1)\omega_1}\varphi_1 + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$\varphi_{11} - 2\omega_1\varphi_{12} - 4\omega_2\varphi_{22} + \frac{5-k}{(k-1)\omega_1}\varphi_1 - 4\frac{k+1}{k-1}\varphi + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$(\omega_1^2+1)\varphi_{11}+\omega_1\omega_2\varphi_{12}+(\omega_2^2+4)\varphi_{22}+3\omega_1\varphi_1+3\omega_2\varphi_2+4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k = 0, \tag{15}$$

$$\omega_1^2\varphi_{11} + \omega_1\omega_2\varphi_{12} + (\omega_2^2+4)\varphi_{22} + 3\omega_1\varphi_1 + 3\omega_2\varphi_2 + 4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0, \tag{16}$$

$$4\omega_1^2\varphi_{11} - 2(1+m\omega_1)\varphi_{12} + m^2\varphi_{22} + 8\omega_1\varphi_1 - 2m\varphi_2 + 4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$9\omega_1^2\varphi_{11} - (2+\omega_1\omega_2)\varphi_{12} + \omega_2^2\varphi_{22} + 15\omega_1\varphi_1 - \omega_2\varphi_2 + 4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$\begin{aligned}&(\omega_1^2+1)\varphi_{11} - \omega_1(\omega_2+2)\varphi_{12} + \omega_2(\omega_2+4)\varphi_{22} + 2\omega_1\varphi_1 + \\ &\qquad + 2(\omega_2+2)\varphi_2 + 4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\left(\frac{4}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_2+4}\right)\varphi_{11}+\omega_2(\omega_2+4)\varphi_{22}+2(\omega_2+2)\varphi_2+4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi+\frac{\lambda}{4}\varphi^k=0, \quad (18)$$

$$4(\omega_1^2+1)\varphi_{11}+2(\omega_1-1)\varphi_{12}+\varphi_{22}+8\omega_1\varphi_1-2\varphi_2+4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Проаналізувавши отримані редуковані рівняння, вкажемо часткові розв'язки деяких з них. Якщо в рівнянні (15) або (16) покласти $\varphi_1=0$, отримаємо

$$(\omega_2^2+4)\varphi_{22}+3\omega_2\varphi_2+4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0, \quad k\neq 1,$$

частковим розв'язком якого є функція

$$\varphi(\omega_2)=\left[-\frac{\lambda(k-1)^2}{8(k+1)}\omega_2^2\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad k\neq 1,$$

що приводить до розв'язку рівняння (8)

$$u(x)=\left[-\frac{\lambda(k-1)^2}{8(k+1)}(x^2-x_2^2+1)^2\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad k\neq 1.$$

Рівняння (17) при $\varphi_2=0$ набуває вигляду

$$(\omega_1^2+1)\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_1+4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi+\frac{\lambda}{4}\varphi^k=0,$$

Його частковий розв'язок вдається знайти при $k=4$:

$$\varphi(\omega_1)=\left[-\frac{9\lambda}{40}\omega_1^2\right]^{-\frac{1}{3}},$$

а, отже, розв'язком рівняння (8) при $k=4$ є функція

$$u(x)=\left[-\frac{9\lambda}{40}\left\{\frac{\beta x(x^2-x_2^2)+\alpha x}{x_2}\right\}^2\right]^{-\frac{1}{3}}.$$

Поклавши в (18) $\varphi_1=0$, отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\omega_2(\omega_2+4)\varphi_{22}+2(\omega_2+2)\varphi_2+4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi+\frac{\lambda}{4}\varphi^k=0,$$

частковим розв'язок якого є

$$\varphi(\omega_2)=\left[-\frac{\lambda}{16}(1-k)^2\omega_2\right]^{\frac{1}{1-k}}. \quad (19)$$

Анзац (9) і функція (19) дають можливість знайти розв'язок рівняння (8)

$$u(x)=\left[-\frac{\lambda}{16}(1-k)^2\{(x^2-x_2^2+1)^2+4(bx)^2\}\right]^{\frac{1}{1-k}}.$$

При $\varphi_2 = 0$ в (17) одержимо рівняння

$$(\omega_1^2 + 1)\varphi_{11} + 2\omega_1\varphi_1 + 4\frac{k-2}{(k-1)^2}\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^k = 0,$$

Частковий розв'язок знаходимо при $k = \frac{4}{7}$:

$$\varphi(\omega_1) = \left[-\frac{9\lambda}{616}\omega_1^2\right]^{\frac{7}{3}},$$

а, отже, і частковий розв'язок рівняння (8)

$$u(x) = \left[-\frac{9\lambda}{616}\left\{\frac{\beta x(x^2 - x_2^2) - \alpha x}{x_2}\right\}^2\right]^{\frac{7}{3}}.$$

Одержані вище результати можна розмножити за допомогою перетворень інваріантності рівняння (8). Ці перетворення мають вигляд:

$$x_\alpha \to \frac{e^m c_{\alpha\beta}(x_\beta - \theta_\beta(x^2 - x_2^2))}{\sigma}, \quad x_2 \to \frac{e^m x_2}{\sigma}, \quad u \to u\left[\frac{e^m}{\sigma}\right]^{\frac{2}{1-k}},$$

де $\sigma = 1 - 2\theta_\alpha x^\alpha + \theta_\alpha\theta^\alpha(x^2 - x_2^2)$, a_α, $c_{\alpha\beta}$, θ_α, m — довільні параметри.

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия: методы и приложения, М., Наука, 1986, 759 с.
4. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук. думка, 1991, 300 с.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3658.