Симетрійна редукція по підалгебрах алгебри Пуанкаре однієї нелінійної системи диференціальних рівнянь для векторного поля

В.І. ФУЩИЧ, Л.Л. БАРАННИК

The procedure of constructing linear ansatzes is algorithmized. Invariant solutions are found by means of linear ansatzes corresponding to three-dimensional subalgebras of the Poincaré algebra $AP(1,3)$.

Система нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + H_l \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial H_k}{\partial t} + E_l \frac{\partial H_k}{\partial x_l} = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1}$$

була запропонована в [1] для опису векторних полів. Цю систему можна розглядати як узагальнення рівняння Ойлера для ідеальної рідини, що досліджувалася в [2–6]. В [7] встановлено, що максимальною алгеброю інваріантності системи (1) є афінна алгебра $AIGL(4,\mathbb{R})$. Вона породжується векторними полями:

$$\begin{aligned}
&P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 0,1,2,3), \quad \Gamma_{00} = -x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + E_l\frac{\partial}{\partial E_l} + H_l\frac{\partial}{\partial H_l} \quad (l = 1,2,3),\\
&\Gamma_{aa} = -x_a\frac{\partial}{\partial x_a} - E_a\frac{\partial}{\partial E_a} - H_a\frac{\partial}{\partial H_a} \quad (\text{немає сумування по } a),\\
&\Gamma_{0a} = -x_a\frac{\partial}{\partial x_0} + E_aE_k\frac{\partial}{\partial E_k} + H_aH_k\frac{\partial}{\partial H_k} \quad (k = 1,2,3),\\
&\Gamma_{a0} = -x_0\frac{\partial}{\partial x_a} - \frac{\partial}{\partial E_a} - \frac{\partial}{\partial H_a},\\
&\Gamma_{ac} = -x_c\frac{\partial}{\partial x_a} - E_c\frac{\partial}{\partial E_a} - H_c\frac{\partial}{\partial H_a} \quad (a \neq c;\ a, c = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{2}$$

Алгебра $AIGL(4,\mathbb{R})$ містить алгебру Пуанкаре $AP(1,3)$ з базисними елементами

$$J_{0a} = -\Gamma_{0a} - \Gamma_{a0}, \quad J_{ab} = \Gamma_{ba} - \Gamma_{ab}, \quad P_\alpha \quad (a, b = 1,2,3;\ \alpha = 0,1,2,3).$$

Метою наших досліджень є побудова інваріантних розв'язків системи (1) за допомогою симетрійної редукції цієї системи до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) по підалгебрах алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$.

Алгебра $AIGL(4,\mathbb{R})$ є підпрямою сумою афінної алгебри $AIGL(4,\mathbb{R})'$ з базисними елементами

$$\Gamma'_{\alpha\beta} = -x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad P'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha, \beta = 0,1,2,3)$$

Доповіді НАН України, 1997, № 8, С. 50–57.

і повної лінійної алгебри $AGL(4,\mathbb{R})''$ з базисними елементами

$$\Gamma''_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma'_{\alpha\beta}.$$

Твердження 1. *Нехай L — підалгебра алгебри $AIGL(4,\mathbb{R})$, r — ранг L, а r' — ранг проекції L на $AIGL(4,\mathbb{R})'$. Якщо $r = r'$, то* $\dim L = r$.

На підставі твердження 1 та необхідної умови існування невироджених інваріантних розв'язків [8] доходимо висновку, що для редукції системи (1) до систем ЗДР нам потрібні тривимірні підалгебри алгебри $AP(1,3)$, які мають тільки один основний інваріант від змінних x_0, x_1, x_2, x_3.

Неважко переконатися, що система (1) є інваріантною відносно перетворення

$$x'_0 = x_0, \quad x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3,$$
$$E'_1 = -E_1, \quad E'_2 = E_2, \quad E'_3 = E_3, \quad H'_1 = -H_1, \quad H'_2 = H_2, \quad H'_3 = H_3.$$

Тому підалгебри алгебри $AP(1,3)$ можна розглядати з точністю до афінної спряженості.

Позначимо $G_a = J_{0a} - J_{a3}$ $(a = 1,2)$.

Твердження 2. *З точністю до афінної спряженості тривимірні підалгебри алгебри $AP(1,3)$, що мають тільки один основний інваріант, залежний від змінних x_0, x_1, x_2, x_3, вичерпуються такими підалгебрами:*

$$\langle P_1, P_2, P_3\rangle, \quad \langle J_{12} + \alpha J_{03}, P_0, P_3\rangle, \quad \langle J_{12} + \alpha J_{03}, P_1, P_2\rangle \quad (\alpha \neq 0),$$
$$\langle J_{03}, P_1, P_2\rangle, \quad \langle G_1, P_0 + P_3, P_2 + \alpha P_1\rangle, \quad \langle G_1, G_2, P_0 + P_3\rangle, \quad \langle G_1, J_{03}, P_2\rangle,$$
$$\langle J_{12}, J_{03}, P_0 + P_3\rangle, \quad \langle G_1, G_2, J_{03}\rangle, \quad \langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha J_{03}\rangle \quad (\alpha > 0),$$
$$\langle J_{12} + P_0, P_1, P_2\rangle, \quad \langle J_{03} + P_1, P_0, P_3\rangle, \quad \langle J_{03} + \gamma P_1, P_0 + P_3, P_2\rangle \quad (\gamma = 0, 1),$$
$$\langle G_1 + P_2, P_0 + P_3, P_1\rangle, \quad \langle G_1 + P_0 - P_3, P_0 + P_3, P_2\rangle,$$
$$\langle G_1 + P_0 - P_3, P_0 + P_3, P_1 + \alpha P_2\rangle, \quad \langle G_1, G_2 + P_2, P_0 + P_3\rangle,$$
$$\langle G_1, G_2, J_{12} + P_0 + P_3\rangle, \quad \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \beta P_2, P_0 + P_3\rangle,$$
$$\langle G_1, J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2, P_0 + P_3\rangle.$$

Щоб одержати цей перелік, потрібно до переліку підалгебр алгебри $AP(1,3)$, що розглядаються з точністю до $P(1,3)$-спряженості [9], застосувати афінну спряженість, при якій, зокрема, можна ототожнювати всі одновимірні підпростори простору трансляцій $\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$.

Підалгебру Лі алгебри $AIGL(4,\mathbb{R})$ утворює лінійна оболонка Q системи операторів, одержаної з базису (2) в результаті вилучення операторів Γ_{0a} $(a = 1,2,3)$. Кожен оператор $Y \in Q$ можна подати у вигляді

$$Y = a_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + b_{ij}\left(E_j\frac{\partial}{\partial E_i} + H_j\frac{\partial}{\partial H_i}\right) + c_i\left(\frac{\partial}{\partial E_i} + \frac{\partial}{\partial H_i}\right), \tag{3}$$

де $x_0 = t$; $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$; b_{ij}, c_i — дійсні числа; $\alpha = 0,1,2,3$; $i,j = 1,2,3$.

Означення. *Інваріант підалгебри Q, який є лінійною функцією відносно змінних E_a, H_a $(a = 1,2,3)$, будемо називати лінійним.*

Нехай

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & u_{13}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & u_{23}(x) \\ u_{31}(x) & u_{32}(x) & u_{33}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Система функцій $f_q = u_{qi}(x)E_i + v_q(x)$, $q = 1, 2, 3$, є системою лінійних інваріантів оператора Y, функціонально незалежних відносно змінних E_1, E_2, E_3, тоді і тільки тоді, коли*

$$a_\alpha(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB = 0, \quad a_\alpha(x)\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_\alpha} + U\vec{C} = 0 \tag{4}$$

і $\det U \neq 0$ *в деякій області простору точок x.*

Твердження 3. *Нехай*

$$X_j = a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{i,k=1}^{3} b_{ik}^{(j)}\left(E_k\frac{\partial}{\partial E_i} + H_k\frac{\partial}{\partial H_i}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{3} c_i^{(j)}\left(\frac{\partial}{\partial E_i} + \frac{\partial}{\partial H_i}\right) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5}$$

— оператори виду (3) і нехай відповідні їм матриці B_1, B_2, B_3 є лінійно незалежними і задовольняють комутаційні співвідношення

$$[B_3, B_j] = B_j \quad (j = 1, 2), \qquad [B_1, B_2] = 0.$$

Матриця $U = \prod_{i=1}^{3} \exp\big[f_i(x)B_i\big]$ *задовольняє систему рівнянь*

$$a_\alpha^{(i)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} &a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}e^{-f_3} + 1 = 0, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0, \\ &a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}e^{-f_3} + 1 = 0, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0, \\ &a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Твердження 4. *Нехай X_j $(j = 1, 2, 3)$ — оператори (5) і нехай відповідні їм матриці B_1, B_2, $B_3 = B_3' + B_3''$ є лінійно незалежними і задовольняють комутаційні співвідношення*

$$\begin{aligned} &[B_3', B_j] = \rho B_j \quad (j = 1, 2), \quad [B_3'', B_1] = -B_2, \quad [B_3'', B_2] = B_1, \\ &[B_3', B_3''] = 0, \quad [B_1, B_2] = 0. \end{aligned}$$

Матриця $U = \prod_{i=1}^{3} \exp\bigl[f_i(x)B_i\bigr]$ *задовольняє систему рівнянь (6) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = -e^{\rho f_3}\cos f_3, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = e^{\rho f_3}\sin f_3, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0,$$
$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = -e^{\rho f_3}\sin f_3, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = -e^{\rho f_3}\cos f_3, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0,$$
$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} + 1 = 0.$$

Нехай

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що коли для деякої 3×3-матриці $U = U(x)$ компоненти вектор-функції $U\vec{E} + \vec{V}$ є лінійними інваріантами підалгебри $F \subset Q$, то лінійними інваріантами цієї підалгебри F є також компоненти вектор-функції $U\vec{H} + \vec{V}$.

По підалгебрах з твердження 2 конструюємо анзаци вигляду

$$U\vec{E} + \vec{V} = \vec{M}(\omega), \quad U\vec{H} + \vec{V} = \vec{N}(\omega) \tag{7}$$

або

$$\vec{E} = U^{-1}\vec{M}(\omega) - U^{-1}\vec{V}, \quad \vec{H} = U^{-1}\vec{N}(\omega) - U^{-1}\vec{V}, \tag{8}$$

де $\vec{M}(\omega)$, $\vec{N}(\omega)$ — невідомі трикомпонентні функції, а матриці U, $\vec{V}$ є відомими, при цьому $\det U \neq 0$ в деякій області простору точок x.

Анзаци вигляду (7) або (8) називаємо *лінійними*.

Оскільки генератори G_1, G_2, J_{03} є нелінійними диференціальними операторами, то на підалгебри, що їх містять, подіємо внутрішнім автоморфізмом, який відповідає елементу $g = \exp\left(\frac{\pi}{4}X\right)$, де

$$X = -\Gamma_{03} + \Gamma_{30} = x_3\frac{\partial}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial}{\partial x_3} - E_3E_k\frac{\partial}{\partial E_k} - H_3H_k\frac{\partial}{\partial H_k} - \frac{\partial}{\partial E_3} - \frac{\partial}{\partial H_3}.$$

Позначимо $J'_{\alpha\beta} = gJ_{\alpha\beta}g^{-1}$, $P'_\alpha = gP_\alpha g^{-1}$, $G'_a = \frac{\sqrt{2}}{2}gG_ag^{-1}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ a = 1, 2$). Неважко переконатися, що

$$G'_a = J'_{0a} - J'_{a3} = x_0\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a\frac{\partial}{\partial x_3} +$$
$$+ E_a\frac{\partial}{\partial E_3} + H_a\frac{\partial}{\partial H_3} + \frac{\partial}{\partial E_a} + \frac{\partial}{\partial H_a} \quad (a = 1, 2),$$
$$J'_{03} = -x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{i=1}^{2}\left(E_i\frac{\partial}{\partial E_i} + H_i\frac{\partial}{\partial H_i}\right) + 2E_3\frac{\partial}{\partial E_3} + 2H_3\frac{\partial}{\partial H_3},$$
$$J'_{12} = J_{12} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + E_2\frac{\partial}{\partial E_1} - E_1\frac{\partial}{\partial E_2} + H_2\frac{\partial}{\partial H_1} - H_1\frac{\partial}{\partial H_2},$$
$$P'_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_0 + P_3), \quad P'_1 = P_1, \quad P'_2 = P_2, \quad P'_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(P_0 - P_3).$$

Нехай $E_a = M_a(x)$, $H_a = N_a(x)$ $(a = 1, 2, 3)$ — розв'язок, інваріантний відносно підалгебри алгебри $AP(1,3)' = gAP(1,3)g^{-1}$ (алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$ з штрихованими операторами). Тоді розв'язок, інваріантний відносно відповідної підалгебри алгебри $AP(1,3)$ має вигляд

$$E_a = \frac{\sqrt{2}M_a(x')}{M_3(x')+1} \quad (a=1,2), \quad E_3 = \frac{M_3(x')-1}{M_3(x')+1},$$
$$H_a = \frac{\sqrt{2}N_a(x')}{N_3(x')+1} \quad (a=1,2), \quad H_3 = \frac{N_3(x')-1}{N_3(x')+1},$$

де

$$x' = \left(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3\right), \quad x'_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - x_3),$$
$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + x_3).$$

В наведеному у твердженні 2 переліку підалгебр алгебри $AP(1,3)$ є 10 підалгебр, які мають двовимірний перетин з простором трансляцій. Це означає, що з точністю до спряженості розв'язки системи (1), які інваріантні відносно деякої з цих підалгебр, є функціями тільки від однієї просторової змінної x_a. Тому часто зручно проводити редукцію не всіх шести рівнянь системи (1), а тільки двох з них, що містять функції E_a і H_a. Інші компоненти розв'язку E_k і H_k $(k \neq a)$ системи (1) будуть записані у вигляді довільних функцій від E_a і H_a відповідно, які підбираємо так, щоб розв'язок був інваріантним відносно всіх генераторів підалгебри.

Проілюструємо сказане на прикладі підалгебри $F = \langle J'_{12} + \alpha J'_{03}, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \neq 0)$. У цьому випадку E_i, H_i $(i = 1, 2, 3)$ є функціями від x_0, x_3. Якщо розглядати тільки систему рівнянь

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_0} + H_3\frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_0} + E_3\frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0, \tag{9}$$

то до уваги треба брати лише оператор

$$-x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + 2E_3\frac{\partial}{\partial E_3} + 2H_3\frac{\partial}{\partial H_3}.$$

Оскільки повну систему інваріантів цього оператора в класі функцій від x_0, x_3, E_3, H_3 утворюють $\omega = x_0x_3$, $E_3x_0^2$, $H_3x_0^2$, то анзац має вигляд

$$E_3 = \frac{1}{x_0^2}M_3(\omega), \quad H_3 = \frac{1}{x_0^2}N_3(\omega).$$

Цей анзац редукує систему (9) до системи

$$-2M_3 + (\omega + N_3)\dot{M}_3 = 0, \quad -2N_3 + (\omega + M_3)\dot{N}_3 = 0. \tag{10}$$

Припустимо, що ми знайшли розв'язок (M_3, N_3) цієї системи, причому $M_3 \neq 0$, $N_3 \neq 0$. Тоді $E_i = F_i(y)$, $H_i = K_i(z)$ $(i = 1, 2)$, де $y = \frac{1}{x_0^2}M_3(\omega)$, $z = \frac{1}{x_0^2}N_3(\omega)$, а F_i, K_i — невідомі функції, які ми знайдемо з умови інваріантності розв'язку відносно $J'_{12}+\alpha J'_{03}$. З рівностей

$$\big(J'_{12}+\alpha J'_{03}\big)\big(E_1-F_1(y)\big)=E_2-\alpha\frac{dF_1}{dy}2y+\alpha E_1=0,$$
$$\big(J'_{12}+\alpha J'_{03}\big)\big(E_2-F_2(y)\big)=-E_1+\alpha E_2-\alpha\frac{dF_2}{dy}2y=0$$

випливає

$$F_1=\alpha F_2-2\alpha y\frac{dF_2}{dy},\quad (1+\alpha^2)F_2+4\alpha^2y^2\frac{d^2F_2}{dy^2}=0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, що є рівнянням Ойлера другого порядку відносно функції F_2, і підставляючи знайдений розв'язок у формулу для F_1, одержимо такі функції:

$$F_1=C_1y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha}-C_2y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha},$$
$$F_2=C_1y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha}+C_2y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha}.$$

Аналогічно знаходимо

$$K_1=C_3y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha}-C_4y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha},$$
$$K_2=C_3y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha}+C_4y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha}.$$

Система (10) має розв'язок

$$M_3=N_3=\frac12\left[2\omega+C\pm\sqrt{4C\omega+C^2}\right].$$

Тому розв'язок системи (1), інваріантний відносно підалгебри F, можна записати у вигляді

$$E_1=C_1y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha}-C_2y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha},$$
$$E_2=C_1y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha}+C_2y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha},\quad E_3=y,$$
$$H_1=C_3y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha}-C_4y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha},$$
$$H_2=C_3y^{1/2}\cos\frac{\ln y}{2\alpha}+C_4y^{1/2}\sin\frac{\ln y}{2\alpha},\quad H_3=y,$$

де $y=\frac{1}{2x_0^2}\left[2x_0x_3+C\pm\sqrt{4Cx_0x_3+C^2}\right]$; C, C_i $(i=\overline{1,4})$ — довільні сталі.

Аналогічно діємо і у випадку, коли підалгебри мають одновимірний перетин з простором трансляцій.

Тепер наведемо приклад редукції системи (1) по підалгебрі, яка має нульовий перетин з простором трансляцій:

$$\langle G'_1,G'_2,J'_{12}+P_3\rangle:$$
$$E_1=\frac{x_1}{x_0}+M_1(\omega)\cos f_3-M_2(\omega)\sin f_3,$$
$$E_2=\frac{x_2}{x_0}+M_1(\omega)\sin f_3+M_2(\omega)\cos f_3,$$

$$E_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0}\big(x_1 \cos f_3 + x_2 \sin f_3\big) M_1(\omega) - \\ + \frac{1}{x_0}\big(x_1 \sin f_3 - x_2 \cos f_3\big) M_2(\omega) + M_3(\omega),$$
$$H_1 = \frac{x_1}{x_0} + N_1(\omega)\cos f_3 - N_2(\omega)\sin f_3,$$
$$H_2 = \frac{x_2}{x_0} + N_1(\omega)\sin f_3 + N_2(\omega)\cos f_3,$$
$$H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0}\big(x_1 \cos f_3 + x_2 \sin f_3\big) N_1(\omega) - \\ + \frac{1}{x_0}\big(x_1 \sin f_3 - x_2 \cos f_3\big) N_2(\omega) + N_3(\omega),$$

де $\omega = x_0,\ f_3 = \frac{x_1^2+x_2^2}{2x_0} - x_3$.

Редукована система має вигляд

$$\dot M_1 + \frac{1}{\omega} N_1 + N_3 M_2 = 0, \quad \dot M_2 + \frac{1}{\omega} N_2 - N_3 M_1 = 0, \quad \dot M_3 = 0,$$
$$\dot N_1 + \frac{1}{\omega} M_1 + M_3 N_2 = 0, \quad \dot N_2 + \frac{1}{\omega} M_2 - M_3 N_1 = 0, \quad \dot N_3 = 0.$$

Її частинному розв'язку

$$M_1 = A_1\omega + \frac{B_1}{\omega}, \quad M_2 = A_2\omega + \frac{B_2}{\omega}, \quad M_3 = 0,$$
$$N_1 = -A_1\omega + \frac{B_1}{\omega}, \quad N_2 = -A_2\omega + \frac{B_2}{\omega}, \quad N_3 = 0$$

відповідає такий розв'язок системи (1), інваріантний відносно підалгебри $\langle G_1'$, $G_2', J_{12}' + P_3\rangle$:

$$E_1 = \frac{x_1}{x_0} + \left(A_1 x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\cos f_3 - \left(A_2 x_0 + \frac{B_2}{x_0}\right)\sin f_3,$$
$$E_2 = \frac{x_2}{x_0} + \left(A_1 x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\sin f_3 + \left(A_2 x_0 + \frac{B_2}{x_0}\right)\cos f_3,$$
$$E_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \left(A_1 + \frac{B_1}{x_0^2}\right)[x_1\cos f_3 + x_2 \sin f_3] - \\ - \left(A_2 + \frac{B_2}{x_0^2}\right)[x_1 \sin f_3 - x_2\cos f_3],$$
$$H_1 = \frac{x_1}{x_0} + \left(-A_1 x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\cos f_3 + \left(A_2 x_0 - \frac{B_2}{x_0}\right)\sin f_3,$$
$$H_2 = \frac{x_2}{x_0} + \left(-A_1 x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\sin f_3 + \left(-A_2 x_0 + \frac{B_2}{x_0}\right)\cos f_3,$$
$$H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \left(-A_1 + \frac{B_1}{x_0^2}\right)[x_1\cos f_3 + x_2 \sin f_3] + \\ + \left(A_2 - \frac{B_2}{x_0^2}\right)[x_1 \sin f_3 - x_2\cos f_3].$$

Отже, алгоритмизовано процес побудови лінійних анзаців. За допомогою лінійних анзаців, що відповідають тривимірним підалгебрам алгебри Пуанкаре

$AP(1,3)$, знайдено інваріантні розв'язки однієї нелінійної системи диференціальних рівнянь для векторного поля.

1. Fushchych W.I., New nonlinear equations for electromagnetic field having velocity different from c, *Доповіді АН України*, 1992, № 4, 24–27.
2. Rosen G., Conformal transformation matrix for fields, *Ann. Phys. (USA)*, 1973, **77**, № 2, 452–453.
3. Капитанский Л.В., Групповой анализ уравнений Навье–Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений, *Докл. АН СССР*, 1978, **243**, № 4, 901–904.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Fairlie D.B., Leznov A.N., General solution of the universal equation in n-dimensional space, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1994, **1**, № 4, 333–339.
6. Фущич В.І., Бойко В.М., Пониження порядку та загальні розв'язки деяких класів рівнянь математичної фізики, *Доповіді НАН України*, 1996, № 9, 43–48.
7. Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V., Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1994, **1**, № 2, 210–221.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
9. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук. думка, 1991, 304 с.