Що таке швидкість електромагнітного поля?

В.І. ФУЩИЧ

A new definition of the velocity of electromagnetic field is proposed. The velocity depends on the physical fields.

Питання, винесене в заголовок, до сьогоднішнього дня, на диво не вирішено навіть на рівні дефініції. Згідно з сучасними припущеннями світло є електромагнітним полем (з відповідними частотами), тому, очевидно, що відповідь на поставлене фундаментальне питання не може бути простим.

Сьогодні найбільш часто користуються такими визначеннями швидкості світла [1, 2]:

1) фазова швидкість (the phase velocity);
2) групова швидкість (the group velocity);
3) швидкість передачі енергії (the velocity of energy transport).

Визначення фазової та групової швидкостей базується на припущеннях, що електромагнітну хвилю можна характеризувати функцією $\Psi(t,\vec{x})$, яка має спеціальний вигляд [1, 2]

$$\Psi(t,\vec{x}) = A(\vec{x})\cos(\omega t - g(\vec{x})), \tag{1}$$

або

$$\Psi(t,\vec{x}) = \int_0^\infty A_\omega(\vec{x})\cos(\omega t - g_\omega(\vec{x}))d\omega, \tag{2}$$

де $A(\vec{x})$ — амплітуда хвилі, $g(\vec{x})$ — довільна дійсна функція. Фазова швидкість визначається за формулою

$$v_1 = \omega/|\vec{\nabla} g(\vec{x})|. \tag{3}$$

З наведених формул ясно, що визначення фазової (групової) швидкості базується на припущені, що будь-яка електромагнітна хвиля має структуру (1) (або (2)) і її швидкість не залежить від амплітуди A. Крім того ніколи не уточнюється якому рівнянню задовольняє функція Ψ. Це дуже важливий момент, оскільки Ψ може задовольняти стандартному лінійному хвильовому рівнянню Даламбера або, наприклад, нелінійному хвильовому рівнянню [3]. Ці два випадки істотно відрізняються один від одного і приводять до принципово різних результатів. Слід також зауважити, що фазова і групова швидкості не визначаються безпосередньо в термінах електромагнітних полів $\vec{E}$ і $\vec{H}$.

Доповіді НАН України, 1997, № 1, С. 51–53.

Швидкість передачі електромагнітної енергії визначається за формулою

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{s}}{W}, \qquad \vec{s} = c(\vec{E} \times \vec{H}), \qquad W = \vec{E}^2 + \vec{H}^2, \tag{4}$$

де $\vec{s}$ — вектор Пойтинга–Хевісайда.

Формула (4) має таку ваду: якщо при переході від однієї інерційної системи до іншої $\vec{E}$ і $\vec{H}$ перетворюються за формулам Лоренца, то швидкість $\vec{v}_2$ не перетворюється при цьому як вектор відносно групи Лоренца.

Мета цієї замітки — дати декілька нових визначень швидкості електромагнітного поля.

Якщо електромагнітне поле є деякий потік енергії, то швидкість такого потоку, по аналогії з гідродинамікою [4], задамо такою формулою (рівнянням)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_l \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_l} = a_1(\vec{D}^2, \vec{B}^2, \vec{E}^2, \vec{H}^2, \vec{D}\vec{E}, \ldots)\vec{D} +& \\ + a_2(\vec{D}^2, \vec{B}^2, \ldots)\vec{B} + a_3(\vec{D}^2, \vec{B}^2, \ldots)\vec{E} + a_4(\vec{D}^2, \vec{B}^2 \ldots)\vec{H} +& \\ + a_5(\vec{D}^2, \vec{B}^2, \ldots)\left(c(\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - 4\pi \vec{J}\right) +& \\ + a_6(\vec{D}^2, \vec{B}^2, \ldots)\left(c(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).&\end{aligned} \tag{5}$$

Структура і явний вигляд коефіцієтнів $a_1, \ldots, a_6$ визначаються з вимоги, щоб рівняння (5) було інваріантним відносно групи Пуанкаре, якщо поля перетворюються за відповідними формулами Лоренца [5].

Основна перевага формули (5), в порівнянні з (1), (2), полягає у наступному:

1) швидкість електромагнітного поля визначається безпосередньо через спостережувані величини $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$ та їх перші похідні;

2) рівняння (5) при відповідних коефіцієнтах інваріантне відносно групи Пуанкаре;

3) у тому випадку, коли коефіцієнти $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, а поля $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ задовольняють рівнянню Максвелла

$$c(\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - 4\pi \vec{J} = 0, \qquad c(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

швидкість електромагнітного поля $\vec{v}$ є постійною величиною

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_l \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_l} = 0.$$

Очевидно, що для застосування формули (5) треба конкретизувати коефіцієнти.

Явно-коваріантне визначення швидкості електромагнітного поля можна задати такою формулою [5]

$$v_\mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\mu} = a(\vec{E}^2, \vec{H}^2, \vec{E}\vec{H}) F_{\alpha\beta} v^\beta. \tag{6}$$

Використовуючи рівняння Максвелла у вакуумі можна, одержати таку формулу для швидкості електромагнітного поля

$$|\vec{v}| = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)^2}{(\mathrm{rot}\ \vec{E})^2 + (\mathrm{rot}\ \vec{H})^2} \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

З формули (7) видно, що швидкість залежить тільки від похідних полів. Слід зауважити, що $|\vec{v}|$ є умовним інваріантом відносно перетворень Лоренца, тобто якщо $\vec{E}$ і $\vec{H}$ задовольняють повній системі рівнянь Максвелла у вакуумі, то $|\vec{v}|$ буде інваріантом групи Лоренца. Іншими словами, умовний інваріант — це така скалярна комбінація з полів, яка зберігається (інваріантна) при умові, що поля задовольняють деяким рівнянням (які мають нетривіальні розв'язки). Добре відомі інваріанти для електромагнітного поля $\vec{E}\vec{H}$ і $\vec{E}^2 - \vec{H}^2$ є абсолютними інваріантами групи Лоренца.

1. Born M., Wolf E., Principle of Optics, New York, Mac Millan.
2. Brillonin L., Wave propagation and group velocity, New York, Academic, 1960.
3. Fushchych W., Shtelen W., Serov N., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.
4. Fushchych W., New nonlinear equations for electromagnetic field having the velocity different from c, *Доповіді АН України*, 1992, № 4, 24–27.
5. Fushchych W., Ansatz'95, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1995, **2**, № 3–4, 216–235.