Умовна симетрія рівнянь Нав'є–Стокса

В.І. ФУЩИЧ, М.І. СЄРОВ, Л.О. ТУЛУПОВА

The conditional symmetry of the Navier–Stokes equations is studied. The multiparameter families of exact solutions of the Navier–Stokes equations are constructed.

Вивчена умовна симетрія рівнянь Нав'є–Стокса. Побудовані багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівнянь Нав'є–Стокса.

Розглянемо систему рівнянь Нав'є–Стокса

$$
\begin{aligned}
&\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda\Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\
&\rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \quad p = f(\rho),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in \mathbb{R}^n$, $\rho = \rho(x) \in \mathbb{R}$, $p = p(x) \in \mathbb{R}$, $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$.

Ліївська симетрія рівнянь (1) добре вивчена (див., наприклад, [1]). Результати цих досліджень можна сформулювати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Максимальна алгебра інваріантності рівнянь (1) складається з операторів:*

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, \\
& J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a},
\end{aligned}
$$

якщо $F(\rho)$ — довільна гладка функція, де $F(\rho) = \dot{f}(\rho)/\rho$;

$$
2)\quad \partial_0, \quad \partial_a, \quad G_a, \quad J_{ab}, \quad D_1 = \rho\partial_\rho, \quad D_2 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a},
$$

якщо $F(\rho) = 0$;

$$
\begin{aligned}
3)\quad & \partial_0, \quad \partial_a, \quad G_a, \quad J_{ab}, \\
& D_3 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{2}{k+1}\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}, \quad k \text{ — довільне},
\end{aligned}
$$

якщо $F(\rho) = \lambda\rho^k$;

$$
\begin{aligned}
4)\quad & \partial_0, \quad \partial_a, \quad G_a, \quad J_{ab}, \quad D_4 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}, \\
& \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - nx_0\rho\partial_\rho + (x_a - x_0u^a)\partial_{u^a},
\end{aligned}
$$

якщо $F(\rho) = \lambda\rho^{(2-n)/n}$.

В цій роботі досліджено умовну симетрію системи (1). Докладніше про поняття умовної симетрії див. роботи [1–4].

Розглянемо спочатку одновимірний випадок. При $x = (x_0, x_1)$ та $u = u(x)$ система (1) має вигляд

$$
\begin{aligned}
&u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F(\rho)\rho_1 = 0, \\
&\rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Укр. мат. журн., 1997, **49**, № 6, С. 806–813.

де $F(\rho) = \dot{f}(\rho)/\rho$. Оператор умовної інваріантності будемо шукати у вигляді

$$Q = A(x,\rho,u)\partial_0 + B(x,\rho,u)\partial_1 + C(x,\rho,u)\partial_\rho + D(x,\rho,u)\partial_u, \tag{3}$$

де A, B, C, D — гладкі функції. Диференціальний оператор першого порядку Q діє на многовиді $(x,\rho,u) \in \mathbb{R}^4$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Рівняння (2) Q-умовно інваріантні відносно оператора (3), якщо функції A, B, C і D задовольняють систему диференціальних рівнянь в одному з таких випадків:*

I. $A \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна покласти $A = 1$):

1) $B \neq u$:

$$\begin{aligned}
&(u-B)\left\{\frac{1}{\rho}[C_u(B-u) - C(B_u+1)] + C\rho\right\} - B_0 - BB_1 + D + \\
&\quad + (BD_u - B_uD) + (D_\rho\rho - D_u u) = 0,\\
&\frac{-2B_uC}{\rho}\left[D + \frac{C}{\rho}(B-u)\right] + \frac{1}{B-u}(B_\rho C + D_\rho\rho)\left(\frac{\lambda}{\rho}C_1 - \frac{\lambda C}{\rho^2}C_u - D\right) + \\
&\quad + \left\{\frac{\lambda}{\rho^3}B_{uu}C^3 + \frac{\lambda}{\rho^2}C^2(D_{uu} - 2B_{1u}) + \frac{C}{\rho}[B_1u - D + B_0 + FC_u + \right.\\
&\quad \left. + \lambda B_{11} - 2\lambda D_{1u} + 2B_1(B-u)] + D_0 + D_1u - FC_1 + \lambda D_{11} + 2B_1D\right\} = 0,\\
&\frac{C}{\rho}[C_u(B-u) - C(B_u+1)] + C_0 + C_uD + C_1u + D_1\rho + C(B_1 + C_\rho - D_u) = 0,\\
&\left\{\frac{\lambda C}{\rho^2}\left[\frac{C}{B-u}(B_u-2) + 2C_u\right] + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho}\left[2C(B-u) + \frac{\lambda C}{B-u}(C_\rho - B_1) - \lambda C_1\right] + 3D + \frac{CF}{B-u}\right\} + \\
&\quad + \frac{2}{\rho}B_u\left\{\left[\frac{2C}{\rho}(B-u) + D\right](B-u) + FC\right\} + \\
&\quad + \frac{\lambda}{B-u}D_\rho\left\{\frac{1}{\rho}[C_u(B-u) - C(2-B_u)] + C_\rho - B_1 + \frac{F\rho}{\lambda}\right\} - \\
&\quad - \frac{B_1}{\rho}[F\rho + (B-u)(2B-u)] + \lambda\left\{\frac{3}{\rho^3}B_{uu}C^2(u-B) + \right.\\
&\quad + \frac{2C}{\rho^2}[(B-u)(2B_{1u} - D_{uu}) - CB_{\rho u}] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho}[2C(B_{1\rho} - D_{\rho u}) + (B-u)(2D_{1u} - B_{11})] + 2D_{1\rho}\right\}B_\rho - \\
&\quad - C\dot{F} - FC_\rho + D_uF - \frac{B-u}{\rho}(B_0 - D + FC_u) = 0,\\
&B_{\rho\rho}\rho^2 + (2B_{\rho u}\rho)(B-u) + B_{uu}(B-u)^2 + B_\rho\rho(2-B_u) - \frac{1}{B-u}B_\rho^2\rho^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$B_\rho\Biggl\{-2F-2\frac{(B-u)^2}{\rho}+\frac{\lambda}{\rho}\Biggl[\frac{1}{\rho}(2C[2-B_u]-C_u[B-u])+$$
$$+B_1-C_\rho-\frac{1}{B-u}(B_\rho C+D_\rho\rho)\Biggr]\Biggr\}-\frac{2(B-u)}{\rho}B_u\left[F+\frac{(B-u)^2}{\rho}\right]+$$
$$+\lambda\left\{\frac{(B-u)^2}{\rho^2}D_{uu}+\frac{1}{\rho}[2(B-u)D_u+(2-B_u)D_\rho]+D_{\rho\rho}\right\}+ \tag{4}$$
$$+\lambda\frac{B-u}{\rho^2}\Biggl\{\frac{3C(B-u)}{\rho}B_{uu}+2[2CB_{\rho u}-B_{1u}(B-u)]+$$
$$+\rho[2CB_{\rho\rho}-2B_{1\rho}(B-u)]\Biggr\}=0;$$

2) $B=u$:

$$D_\rho=0,$$
$$D_0+D_1u-FC_1+\frac{C}{\rho}(FC_u-3D)+\lambda\left(\frac{C^2}{\rho^2}D_{uu}-\frac{2C}{\rho}D_{1u}+D_{11}\right)=0,$$
$$C_0+C_uD-CD_u-CC_\rho+C_1u+D_1\rho-\frac{2C^2}{\rho}=0,$$
$$F\left(\frac{2C}{\rho}+D_u-C_\rho\right)-C\dot{F}=0.$$

II. $A=0$ *(не втрачаючи загальності можна покласти* $B=1$*):*

$$D_0+FCD_u+D_1u-C^2\dot{F}-DD_\rho\rho+(\lambda D_\rho-F)(C_1+C_uD+CC_\rho)+$$
$$+\lambda[D_{11}+D(2D_{1u}+DD_{uu}+2CD_{\rho u})+C(2D_{1\rho}+CD_{\rho\rho})]+D^2=0,$$
$$FCC_u-\lambda C_u(D_1+DD_u+C_uD_\rho)+D(2C+D_u\rho)+C_0+C_1u+D_1\rho=0.$$

Доведення. Випадок I.1. При $A=1$ оператор (3) має вигляд

$$Q=\partial_0+B(x,\rho,u)\partial_1+C(x,\rho,u)\partial_\rho+D(x,\rho,u)\partial_u, \tag{5}$$

тоді

$$\begin{aligned}&Q\rho=\rho_0+B\rho_1-C=0,\\&Qu=u_0+Bu_1-D=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Запишемо умову інваріантності системи (2) відносно оператора (5):

$$\begin{aligned}&\tilde{Q}S_1={}^0\eta^1+{}^1\eta^1u+\lambda^{11}\eta^1+Du_1-C\dot{F}\rho_1-F^1\eta^0=0,\\&\tilde{Q}S_2={}^0\eta^0+{}^1\eta^0u+{}^1\eta^1\rho+D\rho_1+Cu_1=0,\end{aligned} \tag{7}$$

де

$$S_1=u_0+uu_1+\lambda u_{11}+F(\rho)\rho_1,\quad S_2=\rho_0+u\rho_1+\rho u_1,$$
$$\xi^0=1,\quad \xi^1=B(x,\rho,u),\quad \eta^0=C(x,\rho,u),\quad \eta^1=D(x,\rho,u),$$
$${}^\beta\eta^\alpha=\mathbf{D}_\beta\eta^\alpha-u_\delta\mathbf{D}_\beta\xi^\delta,\quad {}^{\beta\gamma}\eta^\alpha=\mathbf{D}_\gamma{}^\beta\eta^\alpha-u_{\delta\beta}\mathbf{D}_\gamma\xi^\delta,$$

$\mathbf{D}_\alpha$ — оператор повного диференціювання; а α, β, γ, β набувають значень 0 і 1.

Переходячи на многовид (x, ρ, u), маємо

$$
\begin{gathered}
\rho_{00} + B\rho_{01} = L_1, \quad \rho_{01} + B\rho_{11} = L_2, \quad u_{00} + Bu_{01} = L_3, \\
u_{01} + Bu_{11} = L_4, \quad \rho_{00} + u\rho_{01} + \rho u_{01} = L_5, \quad \rho_{01} + u\rho_{11} + \rho u_{11} = L_6, \\
L_1 = \mathbf{D}_0 C - \rho_1 \mathbf{D}_0 B, \quad L_2 = \mathbf{D}_1 C - \rho_1 \mathbf{D}_1 B, \quad L_3 = \mathbf{D}_0 D - u_1 \mathbf{D}_0 B, \\
L_4 = \mathbf{D}_1 D - u_1 \mathbf{D}_1 B, \quad L_5 = -\rho_1 u_0 - \rho_0 u_1, \quad L_6 = -2\rho_1 u_1.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Складемо систему лінійних рівнянь (8) відносно других похідних функцій ρ та u. Ця система буде сумісна, коли виконуватиметься умова

$$
L_5 - L_1 - uL_2 + BL_6 - \rho L_4 = 0. \tag{9}
$$

Виберемо вільну змінну ρ_{11}. Тоді

$$
\begin{gathered}
\rho_{00} = L_1 - BL_2 + B^2\rho_{11}, \quad \rho_{01} = L_2 - B\rho_{11}, \\
u_{00} = L_3 - BL_4 + \frac{B^2}{\rho}[L_6 - L_2 + (B-u)\rho_{11}], \\
u_{01} = L_4 - \frac{B}{\rho}[L_6 - L_2 + (B-u)\rho_{11}], \quad u_{11} = \frac{1}{\rho}[L_6 - L_2 + (B-u)\rho_{11}].
\end{gathered} \tag{10}
$$

Щоб визначити перші похідні функцій ρ та u, складемо систему з другого рівняння системи (2) та системи (6). Оскільки ранг одержаної системи 3, а кількість змінних — 4, буде одна вільна змінна, за яку вважатимемо ρ_1. Отже, маємо

$$
\begin{gathered}
\rho_0 = C - B\rho_1, \quad u_1 = \frac{1}{\rho}[(B-u)\rho_1 - C], \\
u_0 = D - \frac{B}{\rho}[(B-u)\rho_1 - C].
\end{gathered} \tag{11}
$$

Розв'язуючи одночасно перше рівняння системи (2) та останнє рівняння системи (10), знаходимо

$$
\begin{gathered}
\rho_{11} = \frac{1}{B-u}\left\{\frac{\rho_1}{\lambda}[F\rho + (B-u)^2] + \frac{1}{\lambda}(Cu - D\rho - BC) + \frac{2\rho_1}{\rho}[(B-u)\rho_1 - C] + \right. \\
\left. + \frac{1}{\rho}(C_u - B_u\rho_1)[(B-u)\rho_1 - C] + C_1 + C_\rho\rho_1 - B_1\rho_1 - B_\rho\rho_1^2\right\}.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Підставляючи ρ_{11} з (12) в (10), одержуємо вираз для всіх інших других похідних через ρ_1. Потім, підставляючи вирази для всіх похідних через ρ_1 в (7) та умову сумісності (9) і розщеплюючи ці рівняння за степенями ρ_1, одержуємо рівняння (4).

Випадки I.2 та II доводяться аналогічно. Теорему доведено.

Для того щоб виписати оператор (3), необхідно знайти розв'язок системи (4), що, очевидно, в загальному випадку зробити неможливо.

При деяких значеннях функції $F(\rho)$ вдалося знайти частинні розв'язки цих систем і за ними побудувати такі оператори:

$$
\begin{aligned}
&F=\lambda, \quad Q_1=\partial_0+u\partial_1+k\rho^2\partial_\rho,\\
&F=\lambda, \quad Q_2=x_0\partial_1+\frac{1}{mx_0}\partial_\rho+\partial_u,\\
&F=\lambda\rho, \quad Q_3=x_0\partial_1-\frac{m}{x_0^2\rho^2}\partial_\rho+\partial_u,\\
&F=-k^2\rho, \quad Q_4=(x_0^2+m^2)\partial_1+\frac{m}{k}\partial_\rho+x_0\partial_u,\\
&F=\lambda\rho^3, \quad Q_5=3x_0\partial_1+\frac{2u}{\rho^3}\partial_\rho+\partial_u,\\
&F=f(\rho), \quad Q_6=x_1\partial_1+u\partial_u,\\
&F=f(\rho), \quad Q_7=F(\rho)\partial_1+\partial_\rho,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де λ, m, k — довільні сталі.

Оператори Q_i використані для побудови апзаців, редукції та знаходження точних розв'язків системи (2). Нижче наведені анзаци, які побудовано за операторами (13) і які дозволяють редукувати систему (2) до систем звичайних диференціальних рівнянь, та точні розв'язки системи рівнянь Нав'є–Стокса, що одержані після розв'язання відповідних редукованих рівнянь:

$$
\begin{array}{lll}
1. & x_0u-x_1=\varphi^1(u), & x_0u-x_1=\Phi(u),\\
& x_0+\dfrac{c_1}{\rho}=\varphi^0(u); & x_0+\dfrac{c_1}{\rho}=\Phi(u);\\
2. & \rho=\dfrac{x_1}{mx_0^2}+\varphi^0(x_0), & \rho=\dfrac{x_1}{mx_0^2}\left[x_1-\dfrac{M}{m}(\ln x_0+1)+c\right]+\dfrac{k}{x_0},\\
& u=\dfrac{x_1}{x_0}+\varphi^1(x_0); & u=\dfrac{1}{x_0}\left(c+x_1-\dfrac{M}{m}\ln x_0\right);\\
3. & \dfrac{\rho^2}{2}=-\dfrac{mx_1}{x_0^3}+\varphi^0(x_0), & \dfrac{\rho^2}{2}=-\dfrac{mx_1}{x_0^2}\left(\dfrac{Mm^2}{2x_0^2}-\dfrac{mx_1}{x_0}+c_2\right),\\
& u=\dfrac{x_1}{x_0}+\varphi^1(x_0); & u=\dfrac{1}{x_0}\left(x_1-\dfrac{Mm}{x_0}\right);\\
4. & \rho=\dfrac{mx_1}{k(x_0^2+m^2)}+\varphi^0(x_0), & \rho=\dfrac{m^2x_1-c_1x_0}{km(x_0^2+m^2)},\\
& u=\dfrac{x_0x_1}{x_0^2+m^2}+\varphi^1(x_0); & u=\dfrac{c_1+x_0x_1}{x_0^2+m^2};\\
5. & \dfrac{\rho^4}{4}=\dfrac{x_1^2}{9x_0^2}+\dfrac{2\varphi^1x_1}{3x_0}+\varphi^0(x_0), & \dfrac{\rho^4}{4}=\dfrac{x_1^2}{9x_0^2}+\dfrac{2c_1x_1}{3x_0^2}+\varphi^0(x_0),\\
& u=\dfrac{x_1}{3x_0}+\varphi^1(x_0); & u=\dfrac{x_1}{3x_0}+\dfrac{c_2}{x_0^{4/3}};\\
6. & \rho=\varphi^0(x_0), \quad u=x_1\varphi^1(x_0); & \rho=\dfrac{c_2}{x_0+c_1}, \quad u=\dfrac{x_1}{x_0+c_1};\\
7. & \displaystyle\int F(\rho)d\rho=x_1+\varphi^0(x_0), & \displaystyle\int F(\rho)d\rho=x_1+\dfrac{x_0^2}{2}-c_1x_0,\\
& u=\varphi^1(x_0), & u=c_2-x_0.
\end{array}
$$

Через Φ позначено довільну гладку функцію; M, c, c_1, c_2, k, m — довільні сталі.

У випадку довільної кількості змінних в рівняннях (1) дослідження умовної симетрії пов'язане з громіздкими перетвореннями і в цій статті не наводиться. Однак деякі з операторів умовної симетрії n-вимірних рівнянь (1) можуть бути одержані безпосереднім узагальненням операторів (13). Такі узагальнення наведені нижче разом з анзацами, побудованими за цими операторами, і відповідними точними розв'язками системи Нав'є–Стокса (1).

Оператор $Q_a = x_0\partial_a + \dfrac{\alpha_a}{mx_0}\partial_\rho + \partial_{u^a}$, $F = \mu$:

$$\rho = \frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{m\omega^2} + \varphi^0(\omega), \qquad \rho = \frac{\vec{\alpha}\vec{x} + k}{mx_0^2} - \frac{M(\ln x_0 + 1)}{m^2x_0^2} + \frac{\lambda}{x_0},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \quad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{x_0} - \frac{M\vec{\alpha}\ln x_0}{mx_0} + \frac{k\vec{\alpha}}{x_0}.$$

Оператор $Q_a = x_0\partial_a + \dfrac{m\alpha_a}{\rho x_0^2}\partial_\rho + \partial_{u^a}$, $F = \mu\rho$:

$$\frac{\rho^2}{2} = -\frac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega^3} + \varphi^0(\omega), \qquad \frac{\rho^2}{2} = -\frac{m(\vec{\alpha}\vec{x}) + k}{x_0^3} + \frac{Mm^2}{x_0^4} + \frac{k}{x_0^2},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \quad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x} + k)}{x_0} - \frac{Mm\vec{\alpha}}{x_0^2}.$$

Оператор $Q_a = (x_0^2 + m^2)\partial_a + \dfrac{m\alpha_a}{k}\partial_\rho + x_0\partial_{u^a}$, $F = -k^2\rho$:

$$\rho = -\frac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{k(\omega^2 + m^2)} + \varphi^0(\omega), \qquad \rho = [m^2(\vec{\alpha}\vec{x} + c_2) - c_1x_0]\frac{km}{x_0^2 + m^2},$$
$$\vec{u} = \frac{\omega\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega^2 + m^2} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \quad \vec{u} = \frac{x_0\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x} + c_2) + c_1\vec{\alpha}}{x_0^2 + m^2}.$$

Оператор $Q_a = (2n+1)x_0\partial_a + \dfrac{2nu^a}{\rho^3}\partial_\rho + \partial_{u^a}$, $F = \rho^3$:

$$\frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{2n+1}\frac{\vec{x}^2}{\omega^2} + \frac{2n}{2n+1}\frac{\vec{x}\vec{\varphi}}{\omega} + \varphi^0(\omega), \quad \frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{2n+1}\frac{\vec{x}^2}{x_0^2} + \frac{n\vec{\lambda}^2}{x_0^2} + \frac{2n}{2n+1}\frac{\vec{x}\vec{\lambda}}{x_0^2} + kx_0^{-4n/(2n+1)},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)\omega} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \qquad \vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)x_0} + \frac{\vec{\lambda}}{x_0}.$$

Оператор $Q_a = (2n+1)x_0\partial_a + \dfrac{x_a - x_0u^a}{x_0\rho^3}\partial_\rho + \partial_{u^a}$, $F = \rho^3$:

$$\frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{2n+1}\frac{\vec{x}^2}{\omega^2} - \frac{1}{2n+1}\frac{\vec{x}\vec{\varphi}}{\omega} + \varphi^0(\omega), \quad \frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{(2n+1)^2}\frac{\vec{x}^2}{x_0^2} + \frac{\vec{\lambda}^2}{4n} - \frac{1}{2n+1}\frac{\vec{x}\vec{\lambda}}{x_0^2} + kx_0^{-4n/(2n+1)},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)\omega} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \qquad \vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)x_0} + \vec{\lambda}.$$

Оператор $Q_a = 3x_0\partial_a + \dfrac{2\alpha_a}{\rho^3}\vec{\alpha}\vec{u}\partial_\rho + \partial_{u^a}$, $F = \rho^3$:

$$\frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}^2}{3\omega}\right)^2 - \frac{2(\vec{\alpha}\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{\varphi})}{3\omega} + \varphi^0(\omega), \quad \frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{3x_0}\right)^2 + \frac{2k(\vec{\alpha}\vec{x})}{3x_0} + \frac{k^2}{x_0^2} + \lambda x_0^{-4/3},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3\omega} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \qquad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3x_0} + \frac{k\vec{\alpha}\vec{x}}{x_0}.$$

Оператор $Q_a = 3x_0\partial_a + \dfrac{\alpha_a}{x_0\rho^3}(\vec{\alpha}\vec{x} - x_0\vec{\alpha}\vec{u})\partial_\rho + \partial_{u^a}$, $F = \rho^3$:

$$\frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}^2}{3\omega}\right)^2 - \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{\varphi})}{3\omega} + \varphi^0(\omega), \quad \frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{3x_0}\right)^2 + \frac{(\vec{\alpha}\vec{\lambda})^2}{3x_0} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{\lambda})}{3x_0} + kx_0^{-4/3},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3\omega} + \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \qquad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3x_0} + \vec{\lambda}.$$

Оператор $Q_a = \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a + \alpha_a u^b\partial_{u^b}$, $F = F(\rho)$:

$$\rho = \varphi^0(\omega), \qquad \rho = \frac{k}{x_0 + \lambda},$$
$$\vec{u} = \vec{\alpha}\vec{x}\vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \quad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{x_0 + \lambda} + \vec{\lambda}.$$

Оператор $Q_a = f\partial_a + \vec{\alpha}\partial_\rho$, $F = F(\rho)$:

$$\int f(\rho)d\rho = \vec{\alpha}\vec{x} + \varphi^0(\omega), \quad \int f(\rho)d\rho = \vec{\alpha}\vec{x} + \frac{x_0^2}{2} - \vec{\lambda}\vec{\alpha}x_0 + k,$$
$$\vec{u} = \vec{\varphi}(\omega), \quad \omega = x_0; \qquad \vec{u} = \vec{\lambda} - \vec{\alpha}x_0.$$

В цих формулах $\vec{\alpha}$ — довільний вектор, для якого виконується умова $(\vec{\alpha})^2 = 1$; $\vec{\lambda}$ — довільний вектор; M, k, m, c_1, c_2 — довільні сталі; n — розмірність простору.

Зауважимо, що n-вимірне узагальнення оператора Q_1 знайти не вдалося, а оператор Q_5 узагальнено чотирма різними способами.

Таким чином, наведені результати вказують на те, що рівняння Нав'є–Стокса мають приховані симетрії, які не можна одержати за допомогою алгоритму Лі. Ці симетрії можна використати для знаходження точних розв'язків даних рівнянь.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Фущич В.И., Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики, *Укр. мат. журн.*, 1991, **43**, № 11, 1456–1470.
3. Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 10, 1370–1376.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., Tulupova L.A., The conditional invariance and exact solutions of the nonlinear diffusion equation, *Dopovidi Ukr. Acad. Nauk*, 1993, № 4, 37–40.