Про нові нелінійні рівняння, інваріантні відносно групи Пуанкаре в двовимірному просторі-часі

В.І. ФУЩИЧ, В.І. ЛАГНО

New representations of the Poincaré $P(1,1)$ and extended Poincaré $\tilde{P}(1,1)$ groups by Lie vector fields are constructed. The result is used to obtain new second-order scalar differential equations, invariant under these groups.

У даному повідомленні проведено класифікацію зображень групи Пуанкаре $P(1,1)$ та розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(1,1)$ в класі векторних полів Лі, побудувано загальний вигляд диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, інваріантних відносно цих груп, а також розглянуто симетрійну редукцію одержаних рівнянь.

1. Нові реалізації зображень алгебр $AP(1,1)$ та $A\tilde{P}(1,1)$. Як відомо [1–3], векторні поля Лі, які генерують деяку групу Лі G, задають базис алгебри Лі AG цієї групи. Тому задача вивчення зображень даної групи G в класі векторних полів Лі еквівалентна вивченню реалізації векторними полями Лі алгебри Лі AG.

Розглядатимемо реалізацію алгебр Лі в термінах векторних полів в просторі $X \otimes U$ двох незалежних та однієї залежної змінної. В нашому випадку X — двовимірний простір Мінковського з координатами x, t, U — простір дійсних скалярних функцій $u(t,x)$. Векторні поля мають форму

$$V = \xi(t,x,u)\partial_x + \tau(t,x,u)\partial_t + \eta(t,x,u)\partial_u. \tag{1}$$

Тут і далі $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$, ξ, τ, η — гладкі функції своїх аргументів.

Будемо позначати генератори трансляцій, поворотів Лоренца та дилатації через P_0, P_1, K, D, відповідно. Вказані генератори задовольняють комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &[P_0,K] = P_1, \quad [P_1,K] = P_0, \quad [P_\mu,D] = P_\mu \quad (\mu = 0,1), \\ &[P_0,P_1] = 0, \quad [K,D] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Вважаємо, що генератори P_0, P_1, K, D задають алгебру Пуанкаре $AP(1,1) = \langle P_0, P_1, K\rangle$ та розширену алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,1) = AP(1,1) \subset\!\!\!\!+ \langle D\rangle$, якщо

1) вони лінійно незалежні;

2) вони задовольняють комутаційні співвідношення (2).

Класифікацію зображень алгебр $AP(1,1)$ та $A\tilde{P}(1,1)$ в класі векторних полів (1) проводимо з точністю до дифеоморфізмів, тобто з точністю до довільної гладкої взаємно-однозначної заміни змінних

$$x' = f(t,x,u), \quad t' = g(t,x,u), \quad u' = h(t,x,u). \tag{3}$$

Доповіді НАН України, 1996, № 11, С. 60–65.

Оскільки генератори P_0, P_1 утворюють комутативний ідеал для алгебри $AP(1,1)$, розгляд починаємо з них.

Лема. *Існують перетворення (3), які зводять генератори P_0, P_1 до однієї з двох форм:*

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x; \tag{4}$$

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_t. \tag{5}$$

Доведення леми випливає з таких міркувань. Згідно з теоремою Лі про спрямлювання векторних полів [2, 3], ми завжди можемо покласти $P_0 = \partial_t$. З виконання комутаційного співвідношення $[P_0, P_1] = 0$ одержуємо, що найбільш загальний вигляд оператора P_1 буде

$$P_1 = \tau(x,u)\partial_t + \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u.$$

Ввівши в розгляд матрицю

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & \xi & \eta \end{pmatrix},$$

складену з коефіцієнтів при похідних в генераторах P_0, P_1 бачимо, що можливі лише два випадки: $\operatorname{rank} M = 2$ або $\operatorname{rank} M = 1$. Далі неважко переконатися, що з умови $\operatorname{rank} M = 2$ випливає реалізація (4), а з умови $\operatorname{rank} M = 1$ — реалізація (5).

Реалізація зображень алгебр $AP(1,1)$, $A\tilde{P}(1,1)$, $AC(1,1)$ для генераторів P_0, P_1 форми (4) вивчена в [4]. Тому тут ми детально зупиняємося на випадкові (5).

Отже, нехай $P_0 = \partial_t$, $P_1 = x\partial_t$. З виконання комутаційних співвідношень (2), одержуємо, що

$$K = (xt + \tau(u))\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x + \eta(u)\partial_u.$$

З точністю до перетворень (3) маємо один клас реалізації зображення алгебри $AP(1,1)$, який можна подати у такому вигляді:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_t, \quad K = xt\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x. \tag{6}$$

Одержана реалізація зображення алгебри $AP(1,1)$ допускає розширення до зображення алгебри $A\tilde{P}(1,1)$, якщо додати оператор дилатації D. З виконання комутаційних співвідношень (2) випливає, що

$$D = \left(t + \tau(u)\sqrt{|x^2 - 1|}\,\right)\partial_t + \eta(u)\partial_u.$$

Неважко показати, що існують перетворення (3), які залишають вигляд (6) операторів P_0, P_1, K незмінним, а оператор D зводять до вигляду

$$D = t'\partial_{t'} + \epsilon u'\partial_{u'}, \quad \epsilon = 0, 1.$$

Тим самим ми побудували дві нові реалізації алгебри $A\tilde{P}(1,1)$:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_t, \quad K = xt\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x, \quad D_1 = t\partial_t; \tag{7}$$

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_x, \quad K = xt\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x, \quad D_2 = t\partial_t + u\partial_u. \tag{8}$$

Отже, справедлива така теорема.

Теорема. *З точністю до перетворень (3) зображення алгебр $AP(1,1)$, $A\tilde{P}(1,1)$, $AC(1,1)$ векторними полями Лі (1) вичерпуються реалізаціями, побудованими в роботі [4], а також зображеннями (6)–(8).*

Зауваження 1. Неважко переконатися в тому, що зображення (7), (8) алгебр $A\tilde{P}(1,1)$ не допускають розширення до зображень векторними полями (1) конформної алгебри $AC(1,1)$.

Зауваження 2. Коваріантні зображення векторними полями (зображення, для яких ранг матриці M збігається з розмірністю простору Мінковського) узагальнених груп Пуанкаре $P(n,m)$ та їх розширень до конформної групи включно в $(n+m)$-вимірному просторі Мінковського, для випадку однієї залежної функції u вивчалися в роботах [5–7]. Там було показано, що в загальному випадку ці групи допускають лише стандартні зображення. Тільки для груп $P(1,2)$, $P(2,2)$ та їх розширень, до конформної групи включно, були побудовані нові коваріантні зображення векторними полями Лі.

2. Диференціальні інваріанти та інваріантні рівняння. Процедура побудови інваріантних рівнянь в класичному підході Лі є стандартною. Так нехай X_a $(a=1,\dots,N)$ складають базис алгебри Лі AG групи симетрії G, що діє в просторі $X\otimes U$. В нашому випадку $X\otimes U$ є простір $\{x,t,u\}$, а всі X_a мають вигляд (1). Розглядаємо рівняння

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tx},u_{tt})=0, \tag{9}$$

де F — довільна гладка функція. Рівняння (9) буде інваріантним відносно групи G, якщо функція F задовольняє співвідношення [2, 3]

$$\underset{2}{X_a}F=0, \quad \forall\, a. \tag{10}$$

Тут $\underset{2}{X_a}$ — другі продовження операторів X_a. Розв'язавши систему (10), одержимо множину елементарних диференціальних інваріантів $J_k(x,t,u,u_\mu,u_{\mu\nu})$ $(\mu,\nu=x,t)$, а інваріантне рівняння матиме вигляд

$$\Phi(J_1,\dots,J_s)=0.$$

Отже, щоб описати найбільш загальний вигляд рівняння інваріантного відносно групи G, потрібно знайти множину всіх елементарних інваріантів даної групи. Оскільки число змінних у співвідношеннях (9), (10) дорівнює 8, алгебри $AP(1,1)$ та $A\tilde{P}(1,1)$ є розв'язними, загальні орбіти продовжених груп є три- та чотиривимірними, відповідно, то ми отримаємо п'ять для групи $P(1,1)$ та чотири для групи $\tilde{P}(1,1)$ функціонально незалежних елементарних диференціальних інваріантів.

1. Випадок алгебри $AP(1,1)$ з базисними генераторами (6). Тут

$$\begin{aligned}
&\underset{2}{P_0}=P_0, \quad \underset{2}{P_1}=P_1-2u_{tx}\partial_{u_{xx}}-u_{tt}\partial_{u_{tx}},\\
&\underset{2}{K}=K-(tu_t+2xu_x)\partial_{u_x}-xu_t\partial_{u_t}-2(u_x+2xu_{xx}+tu_{xt})\partial_{u_{xx}}-\\
&\qquad-(u_t+tu_{tt}+3xu_{tx})\partial_{u_{tx}}-2xu_{tt}\partial_{u_{tt}},
\end{aligned}$$

тому базис фундаментальних розв'язків системи (10) складають функції

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_t^2(x^2-1), \quad J_3 = u_{tt}(x^2-1),$$
$$J_4 = (x^2-1)^2(u_x u_{tt} - u_t u_{tx}) - x(x^2-1)u_t^2,$$
$$J_5 = (x^2-1)^3(u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2) + 2x(x^2-1)^2(u_x u_{tt} - u_t u_{tx}) - x^2(x^2-1)u_t^2,$$

а найбільш загальне $P(1,1)$-інваріантне рівняння (9) має вигляд

$$\Phi(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5) = 0. \tag{11}$$

2. Випадок алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з базисними генераторами (7). Врахувавши, що найбільш загальне $P(1,1)$-інваріантне рівняння (9) має вигляд (12) і що

$$\underset{2}{D_1} = D_1 - u_t\partial_{u_t} - 2u_{tt}\partial_{u_{tt}} - u_{tx}\partial_{u_{tx}},$$

одержали такі чотири елементарні диференціальні інваріанти для алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з генераторами (7):

$$\Sigma_1 = J_1, \quad \Sigma_2 = J_2^{-1}J_3, \quad \Sigma_3 = J_2^{-1}J_4, \quad \Sigma_4 = J_2^{-1}J_5, \tag{12}$$

де значення J_k наведені в (11).

3. Випадок алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з базисними генераторами (8). Тут

$$\underset{2}{D_2} = D_1 - u_x\partial_{u_x} - u_{tt}\partial_{u_{tt}} + u_{xx}\partial_{u_{xx}},$$

а тому алгебра $A\tilde{P}(1,1)$ має такі чотири елементарні диференціальні інваріанти другого порядку:

$$\Sigma_1 = J_1 J_3, \quad \Sigma_2 = J_2, \quad \Sigma_3 = J_4, \quad \Sigma_4 = J_5, \tag{13}$$

де значення J_k наведені в (11). Найбільш загальне $\tilde{P}(1,1)$-інваріантне рівняння (9) має вигляд

$$\Phi(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4) = 0.$$

де Σ_k $(k=\overline{1,4})$ набувають значення (13) у випадку алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з генераторами (7) або (14) — у випадку алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з генераторами (8).

Зауважимо, що для розглянутих реалізацій алгебр $AP(1,1), A\tilde{P}(1,1)$ інваріантними є рівняння, які є узагальненням відомих рівнянь Монжа–Ампера.

3. Симетрійна редукція інваріантних рівнянь. Інваріантність одержаних рівнянь відносно групи Пуанкаре $P(1,1)$ або однієї з розширених груп Пуанкаре $\tilde{P}(1,1)$ дозволяє провести симетрійну редукцію цих рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь. Процедура симетрійної редукції вимагає попередньої класифікації підалгебр відповідної алгебри симетрії з точністю до спряженості, яку визначає група інваріантності даного рівняння. Тут ми використовуємо відому класифікацію підалгебр алгебр $AP(1,1)$, $A\tilde{P}(1,1)$ (див., наприклад, [8]), додатково ввівши відношення еквівалентності підалгебр алгебри симетрії на множині розв'язків інваріантного рівняння [8]. Крім того, обмежуємося підалгебрами, для яких анзац містить всі незалежні змінні.

Вказані вимоги задовольняє єдина одновимірна підалгебра алгебри $AP(1,1)$, а саме, $L_1 = \langle K\rangle$. Їй відповідає анзац

$$u = \varphi(\omega), \tag{14}$$

де $\omega = t^2(x^2-1)^{-1}$. Підстановка анзацу (16) в рівняння (12) приводить до звичайного диференціального рівняння

$$\Phi(\varphi, 4\omega\dot{\varphi}, 2\rho, 0, 4\omega\dot{\varphi}\rho) = 0.$$

Тут і далі $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\omega}$, $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$, $\rho = \dot{\varphi} + 2\omega\ddot{\varphi}$.

У випадку алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з генераторами (7) крім підалгебри L_1 вказані вимоги задовольняють підалгебри $L_2 = \langle K + \alpha D\rangle$ та $L_3 = \langle D + \varepsilon_1 K + \varepsilon_2 P_0\rangle$, де $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а ε_1, ε_2 незалежно одне від одного набувають значення ± 1. Крім того, в даному випадку $D = D_1$. Анзац (16) у випадку алгебри L_1 редукує рівняння (15) до рівняння

$$\Phi\left(\varphi, \frac{1}{2}\omega^{-1}\rho, 0, \rho\right) = 0.$$

Алгебрам L_2, L_3 відповідає анзац (16), де $\omega = t^2(x-1)^{-1-\alpha}(x+1)^{\alpha-1}$ для L_2 та $\omega = \frac{2t+\varepsilon_2}{2(x-\varepsilon_1)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}\ln\frac{x+\varepsilon}{x-\varepsilon_1}$ для L_3. Редуковані рівняння (15) мають відповідно вигляд

$$\Phi\left(\varphi, \frac{1}{2}\dot{\varphi}^{-2}\omega^{-1}\rho, \alpha, (1-\alpha^2)\dot{\varphi}^{-1}\rho - \alpha^2\right) = 0,$$
$$\Phi(\varphi, \ddot{\varphi}\dot{\varphi}^{-2}, \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^{-1} - 1) = 0.$$

Нарешті, у випадку алгебри $A\tilde{P}(1,1)$ з генераторами (8), крім підалгебри L_1, L_2, L_3, вказані вимоги задовольняє підалгебра $L_4 = \langle D\rangle$. Тут $D = D_2$. Редукція рівняння (15), що відповідає алгебрі L_1, приводить до рівняння

$$\Phi(2\varphi\rho, 4\omega\dot{\varphi}, 0, 4\omega\dot{\varphi}\rho) = 0.$$

Підалгебрам L_2, L_3, L_4 відповідає анзац

$$u = f(x,t)\varphi(\omega),$$

де $f = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\omega = t^2(x+\alpha)^{\alpha-1}(x-1)^{-1-\alpha}$ — для алгебри L_2; $f = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{\varepsilon_1}{2}}$, $\omega = \frac{2t+\varepsilon_2}{2(x-\varepsilon_1)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}\ln\frac{x+\varepsilon}{x-\varepsilon_1}$ — для алгебри L_3; $f = t$, $\omega = x$ — для алгебри L_4. Редуковані рівняння (15) мають відповідно вигляд

$$\Phi(2\varphi\rho, 4\omega\dot{\varphi}^2, 2\alpha\varphi\rho, 2\rho, 2\rho(2\omega(1-\alpha^2)\dot{\varphi} - \alpha^2\varphi)) = 0,$$
$$\Phi(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}^2, \varepsilon_1\varphi\ddot{\varphi}, (\varphi + \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{\varphi})\ddot{\varphi}) = 0,$$
$$\Phi(0, (\omega^2-1)\varphi^2, -(\omega^2-1)\varphi[(\omega^2-1)\dot{\varphi} + \omega\varphi], -(\omega^2-1)[(\omega^2-1)\dot{\varphi} + \omega\varphi]^2) = 0.$$

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989, 639 с.
4. Rideau D., Winternitz P., Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-times, *J. Math. Phys.*, 1990, **31**, № 5, 1095–1105.

5. Yegorchenko I.A., Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations, in Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, Kyiv, Institute of Mathematics, 1992, 62–65.

6. Fushchych W.I., Lahno V.I., Zhdanov R.Z., On nonlinear representation of the conformal algebra $AC(2,2)$, *Доповіді АН України*, 1993, № 9, 44–47.

7. Fushchych W., Zhdanov R., Lahno V., On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1994, **1**, № 3, 295–308.

8. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук, думка, 1991, 304 с.