# Пониження порядку та загальні розв'язки деяких класів рівнянь математичної фізики

*В.І. ФУЩИЧ, В.М. БОЙКО*

The procedure of lowering the order and construction of general solutions for some classes of partial differential equations is proposed. A number of examples are presented. The classes of general solutions of some linear and nonlinear equations of mathematical physics are constructed.

В даній статі пропонується процедура пониження порядку та побудови загальних розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних

$$L(D[u]) + F(D[u]) = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_k)$; $L$ — диференціальний оператор першого порядку (лінійний або нелінійний):

$$L \equiv a^i(x, u)\partial_{x_i}, \tag{2}$$

по $i$ сумування від 0 до $k$; $a^i(x, u)$ — довільні гладкі функції, що одночасно не є тотожними нулями; $D[u]$ — диференціальний вираз $n$-го порядку

$$D[u] = D\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\right), \tag{3}$$

$u_{(m)}$ — набір похідних $m$-го порядку, $m = \overline{1, n}$; $F$ — довільна гладка функція від $D[u]$. Як частинний випадок $D[u]$ може залежати лише від $x$ і $u$ (в цьому випадку будемо говорити, що порядок співвідношення (3) — нульовий). Таким чином, (1) — рівняння в частинних похідних $(n+1)$-го порядку.

Для рівнянь типу (1) пропонується простий спосіб пониження порядку та побудови розв'язків, який базується на локальній заміні змінних, яка зводить оператор (2) до оператора диференціювання за однією з незалежних змінних, тобто деяка "діагоналізація".

Вводимо заміну змінних

$$\begin{aligned} &\tau = f^0(x, u), \\ &\omega^a = f^a(x, u), \quad a = \overline{1, k}, \\ &z = u, \end{aligned} \tag{4}$$

де $z(\tau, \vec{\omega})$ — нова залежна змінна, $\vec{\omega} = (\omega^1, \dots, \omega^k)$.

Функції $f^0, f^a$ визначаємо з умов

$$L(f^0) = 1, \quad L(f^a) = 0, \quad a = \overline{1, k}, \tag{5}$$

Доповіді НАН України, 1996, № 9, С. 43–48.

причому $f^1, \ldots, f^k, u$ повинні утворювати повний набір функціонально незалежних інваріантів оператора (2). А $f^0$ вибираємо як деякий частинний розв'язок рівняння $Ly = 1$.

Співвідношення (5) визначають заміну змінних (4), при якій оператор $L$ зводиться до оператора диференціювання

$$L \Rightarrow \partial_\tau. \tag{6}$$

Знайшовши вигляд співвідношення (3) в нових змінних (4), вихідне рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$\partial_\tau\big(\widetilde{D}z\big) + F\big(\widetilde{D}z\big) = 0, \tag{7}$$

де $\widetilde{D}z$ — диференціальний вираз $Du$ в змінних (4).

Рівняння (7) — звичайне диференціальне рівняння першого порядку відносно $\tau$ для $\widetilde{D}z$. Один раз проінтегрувавши (7), знаходимо $\widetilde{D}z$. Таким чином, розв'язавши (7), одержуємо диференціальне рівняння в частинних похідних $n$-го порядку відносно $z(\tau, \vec{\omega})$ (понизили порядок рівняння (1) на одиницю) з однією довільною функцією від $\vec{\omega}$ — константою інтегрування рівнняня (7).

**Зауваження.** Алгоритм буде також ефективним і у випадку, коли в (1) $F = F(Du, f^0, f^1, \ldots, f^k)$, при цьому, інтегруючи рівняння (7), змінні $\omega^a$ будемо вважати параметрами.

Проілюструємо описаний алгоритм на прикладах для конкретних рівнянь математичної фізики.

Розглянемо одновимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) можна записати у вигляді (1) наступним чином

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \tag{9}$$

Заміна змінних

$$\tau = t, \quad \omega = x + t, \quad z = u,$$

дає можливість переписати рівняння (9) у вигляді

$$\partial_\tau\left(z_\tau + 2z_\omega\right) = 0,$$

раз проінтегрувавши яке, одержуємо

$$z_\tau + 2z_\omega = g(\omega). \tag{10}$$

Внаслідок довільності $g(\omega)$, покладемо $g(\omega) = 2h'(\omega)$, тоді система рівнянь характеристик для (10) матиме вигляд

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\omega}{2} = \frac{dz}{2h'(\omega)}.$$

Знайшовши перші інтеграли системи характеристик, одержуємо розв'язок рівняння (10)

$$z - h(\omega) = f(\omega - 2\tau), \tag{11}$$

$h$, $f$ — довільні функції свого аргументу. Переписавши (11) в змінних $(t, x, u)$, знаходимо добре відомий загальний розв'язок рівняння (8)

$$u = h(x + t) + f(x - t).$$

Розглянемо рівняння, яке було запропоновано в [1, 2] для опису руху рідини,

$$L(Lu) = 0, \quad L \equiv \partial_t + u\partial_x. \tag{12}$$

Дане рівняння можна розглядати як узагальнення одновимірного рівняння Ньютона–Ойлера для рідини (рівняння простої хвилі). В розгорнотому записі рівняння (12) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Заміна змінних

$$\tau = t, \quad \omega = x - ut, \quad z = u,$$

дає можливість записати рівняння (12) у вигляді

$$\partial_\tau\left(\frac{z_\tau}{1 + \tau z_\omega}\right) = 0. \tag{13}$$

Проінтегрувавши (13), одержуємо параметричний розв'язок

$$z \pm \int \frac{d\omega}{\sqrt{h(\omega) + p}} = \varphi(p)$$
$$\tau^2 - h(\omega) = p,$$

де $p$ — параметр, $h$, $\varphi$ — довільні функції.

Повернувшись до старих змінних, одержуємо розв'язок рівняння (12). Деякі приклади неявних розв'язків з однією довільною функцією для рівняння (12) наведені нами в [3, 4].

Рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{14}$$

можна записати у вигляді (1) наступним чином

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{15}$$

За допомогою заміни змінних

$$\tau = t, \quad \omega^1 = t + x, \quad \omega^2 = t - y, \quad z = u, \tag{16}$$

використовуючи описаний алгоритм, одержимо наступний розв'язок рівняння (14)

$$u = f(t+x, t-y) + g(t-x, t+y).$$

**Зауваження.** Природнє узагальнення описаного алгоритму для (1) на класи диференціальних рівнянь в частинних похідних наступного вигляду

$$L^m(Du) + b_{m-1}L^{m-1}(Du) + \cdots + b_1 L(Du) + b_0 = 0, \tag{17}$$

де $b_j = b_j(Du, f^0, f^1, \ldots, f^k)$, $j = \overline{0, m-1}$; $L^m = \underbrace{LLL \cdots LL}_{m}$; $L$, $Du$, $f^0, f^1, \ldots, f^k$ визначаються відповідно з співвідношеннями (2)–(6).

Після заміни (4)–(6) задача пониження порядку рівняння (17) зводиться до проблеми інтегрування звичайного диференціального рівняння $m$-го порядку.

Для рівняння

$$D^n(u) = 0, \quad D \equiv x_\mu \partial_{x_\mu}, \quad \mu = \overline{0, k},$$

використавши заміну змінних

$$\tau = \ln x_0, \quad \omega^a = \frac{x_a}{x_0}, \quad a = \overline{1, k}, \quad z = u,$$

одержано наступний розв'язок

$$u = C_{n-1}(\ln x_0)^{n-1} + C_{n-2}(\ln x_0)^{n-2} + \cdots + C_1 \ln x_0 + C_0,$$

де $C_i = C_i\left(\frac{x_1}{x_0}; \ldots; \frac{x_k}{x_0}\right)$, $i = \overline{0, n-1}$.

Одердані результати легко узагальнюються на випадок систем рівнянь вигляду

$$L(\vec{D}[\vec{u}]) = \vec{F}\Big(f^0, f^1, \ldots, f^k, \vec{D}[\vec{u}]\Big),$$

де $\vec{u} = (u^1(x), \ldots, u^m(x))$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$; $L$, $f^0, f^1, \ldots, f^k$ визначаються відповідно з співвідношеннями (2), (4), (5), (6), де $u \equiv \vec{u}$; $\vec{D}[\vec{u}] = (D^1, \ldots, D^m)$, де $D^i = D^i\left(x, \vec{u}, \vec{u}_{(1)}, \vec{u}_{(2)}, \ldots, \vec{u}_{(n)}\right)$, $i = \overline{1, \ldots, m}$, $\vec{u}_{(i)}$ — набір похідних $m$-го порядку від кожної з компонент вектора $\vec{u}$; $\vec{F} = (F^1, \ldots, F^m)$. Як частинний випадок компоненти $\vec{D}[\vec{u}]$ можуть залежати лише від $x$ і $\vec{u}$. Нижче наведемо приклади реалізації запропонованого алгоритму для систем.

Розглянемо систему рівнянь Ойлера руху невязкої, нестисливої рідини

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_0} + v^k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \vec{0}, \tag{18}$$

де $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$, $v^l = v^l(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $l = 1, 2, 3$.

Систему (18) можна записати так:

$$\left(\partial_0 + v^k \partial_k\right) v^l = 0, \quad l = 1, 2, 3 \tag{19}$$

Після заміни змінних

$$\tau = x_0, \quad \omega^a = x_a - v^a x_0, \quad a = 1, 2, 3, \quad z^l = v^l, \quad l = 1, 2, 3$$

система (19) матиме вигляд

$$\partial_\tau z^l = 0, \quad l = 1,2,3. \tag{20}$$

Інтегруючи рівняння (20) і виконавши обернену заміну змінних, одержуємо розв'язок системи (18) у неявному вигляді

$$v^l = g^l\left(x_1 - v^1 x_0, x_2 - v^2 x_0, x_3 - v^3 x_0\right).$$

де $g^l$ — довільні гладкі функції. Даний розв'язок системи (18) співпадає з розв'язком, одержаним іншим шляхом в [5].

Розглянемо систему рівнянь для вектор-потенціалу

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = 0, \quad \mu = 0,\dots,3. \tag{21}$$

Вважаємо, що $A^0 \neq 0$. За допомогою заміни змінних

$$\tau = \frac{x_0}{A^0}, \quad \omega^a = x_a A^0 - x_0 A^a, \quad a = 1,2,3, \quad A^\mu = A^\mu, \quad \mu = 0,1,2,3$$

одержуємо розв'язок системи (21)

$$A^\mu = g^\mu\left(x_1 A^0 - x_0 A^1, x_2 A^0 - x_0 A^2, x_3 A^0 - x_0 A^3\right),$$

де $g^\mu$ — довільні гладкі функції.

Нехай тепер маємо деяку систему рівнянь в частинних похідних, що визначається набором операторів $L^1,\dots,L^r$ вигляду (2) ($u \equiv \vec{u}$), причому кількість операторів повинна не перевищувати кількість незалежних змінних. Якщо оператори утворюють комутативну алгебру Лі і ранг матриці, складеної з коефіцієнтів операторів $L^1,\dots,L^r$, дорівнює $r$, тоді існує локальна заміна змінних, що приводить ці оператори до $r$ операторів диференціювання відносно $r$ перших незалежних змінних.

Розглянемо одновимірну систему

$$\begin{aligned} &(\partial_t + v\partial_x)u = 0,\\ &(\partial_t + u\partial_x)v = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

де $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$, $u \neq v$. Після заміни змінних

$$\tau = \frac{x - ut}{v - u}, \quad \omega = \frac{x - vt}{u - v}, \quad U = u, \quad V = v \tag{23}$$

система (22) матиме простий вигляд

$$\begin{aligned} &\partial_\tau U = 0,\\ &\partial_\omega V = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Проінтегрувавши (24) та виконавши обернену до (23) заміну змінних, одержуємо розв'язок системи (22)

$$u = f\left(\frac{x - vt}{u - v}\right), \quad v = g\left(\frac{x - ut}{v - u}\right),$$

де $f$, $g$ — довільні гладкі функції.

Робота виконана при фінансовій підтримці AMS, фондів Сороса та INTAS.

1. Fushchych W.I., New nonlinear equation for electromagnetic field having the velocity different from $c$, *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy*, 1992, № 1, 24–27.
2. Fushchych W., Symmetry analysis. Preface, in Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, Kiev, Inst. of Math., 1992, 5–6.
3. Fushchych W., Boyko V., Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of hydrodynamical type, Preprint LiTH-MAT-R-95-19, Linköping University, Linköping, Sweden, 1995, 11 p.
4. Boyko V., Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of a hydrodynamic type, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1995, **2**, № 3–4, 418–424.
5. Fairlie D.B., Leznov A.N., General solution of the universal equation in $n$-dimensional space, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1994, **1**, № 4, 333–339.